مكتبة خواطر
2.75

الجامعة الهاشمية

Calculus (1)

تفاضل وتكامل (1)

الآمال

إعداد : أيمن زيود

بخط : عبد الله دياك

شرح مفصل للمادة مضاف إليها أسئلة سنوات

الفصل الدراسي الثاني 2017/2018

مكتبة خواطر

INDEX	الفهرس	PAGE
INFORMOTIN	معلومات	1
DIFNSION OF FUNCTION	تعريف الإقتران	5
DOMAIN	المجال	6
RANGE	المدى	12
COMPSITION FUNCTION (fog)	الاقترانات التركيبية	15
GRAPHS OF SOME FUNCTION	رسمات بعض الاقترانات	19
SYMMETRY	التماثل	20
ODD & EVEN FUNCTION	الفردي و الزوجي	22
INVERSE FUNCTION	الاقترانات العكسية	23
TRIGONOMETRIC FUNCTION	الاقترانات المثلثية	32
INVERSE OF TRIGONOMETRIC FUNCTION	الاقترانات المثلثية العكسية	42
RULES OF INVERSE OF TRIGONOMETRIC	قواعد اقترانات مثلثية عكسية	44
THEOREM OF TRIGONOMETRIC FUNCTION	متطابقات الاقرانات المثلثية	48
EXPONETIAL FUNCTION	الاقتران الأسي	49
LOGARITHMIC FUNCTION	الاقتران اللوغاريتمي	52
LIMITS	النهايات	58
LIMIT OF TRIGONOMETRIC	نهايات الاقترانات المثلثية	69
VERTICAL A SYMPTOTE	التقارب العامودي	70
THE SEQUEEZ THEOREM	نظريه الحصر (الشطيرة)	73
LIMITS AT INFINITE	النهايات عند المالانهية	74
HORIZONATL A SYMPTOTE	التقارب الأفقي	83
CONTINUITY	الاتصال	85
INTERMEDIATE VALUE THM (IVT)	نظرية القيمة المتوسطه	94
YEARS FIRST	سنواااااااااات فيرست	99-98
DERIVATIVE	الاشتقاق	99
IMPLICT DERIVATIVE	الاشتقاق الضمني	105
HIGHER DERIVATIVE	المشتقات العليا	114
DIFFERENTIABILITY	قابلية الاشتقاق	117
DEFINSION OF DERIVATIVE	تعريف المشتقة	121
EQUATION OF TANGENT	معادله المماس	124
HYPERBOLIC FUNCTION	الاقترانات الزائدية	128
APPLICATION OF DERIVATIVE	تطبيقات على الاشتقاق	135
THE SECOND DERIVATIVE TEST	اختبار المشتقة الثانية	143
L'HOPITAL	اللوبيتال	144
MEAN VALUE THM & ROLLER THM (MVT)	نظرية القيمة	154
INTEGRATION	التكامل	155
INTEGRATION BY SUBSTITUTION	التكامل بالتعويض	162
THE FUNDEMNTAL OF CALCULAS	النظرية الاساسية في الكالكولاس	166
AREA BETWEEN THE FUNCTION	المساحه بين الاقترانات	170

مكتبة خواطر

VOLUME	الحجم	175
AREA OF THE CIRCLE	مساحه الدائره	176
FIRST DR. OMAR	فيرست دكتور عمر السيد	O
SECOND DR. OMAR	سكند دكتور عمر السيد	OO
FINAL DR.OMAR	فاينال دكتور عمر السيد	OOO
FIRST DR.MOHAMMD SERSEK	فيرست دكتور محمد السرسك	M
SECOND DR.MOHAMMD SERSEK	سكند دكتور محمد السرسك	MM
FINAL DR.MOHAMMD SERSEK	فاينال دكتور محمد السرسك	MMM
FIRST DR.HATEM MEQDADE	فيرست دكتور حاتم مقدادي	H
SECOND DR.HATEM MEQDADE	سكند دكتور حاتم مقدادي	HH
FINAL DR.HATEM MEQDADE	فاينال دكتور حاتم مقدادي	HHH
TEST BANK	بنك الاسئلة	TEST

وجدت هذه الدوسية لتسهيل على الطالب من حيث الشرح و اسئلة و سنوات

ويوجد لديها مجموعة دوسيات الآمال :

- فيزياء عامة 1
- ستاتيك
- ثيرمو

هذا عمل بشري في حال وجود اي خطأ من غير قصد الرجاء التواصل معنا

ايمن زيود

0790606515

مراجعة هامة

* تحليل - إلى - العوامل .

(X) الفرق بين مربعين

$(A^2 - B^2) = (A-B)(A+B)$

كل قوس عبارة عن مرافق للقوس الآخر

Examples :-

1) $(x^2-4) = (x-2)(x+2)$

2) $(4x^2-9) = (2x-3)(2x+3)$

3) $(x^2-7) = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$

4) $(x+1)^2-16 = ((x+1)-4)((x+1)+4)$
$= (x-3)(x+5)$

* الفرق - بين - مكعبين .
* مجموع - مكعبين .

$(A^3-B^3) = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$(A^3+B^3) = (A+B)(A^2-AB+B^2)$

عكس إشارة التكعيب

Examples :-

1) $(x^3-27) = (x-3)(x^2+3x+9)$

2) $(x^3+1) = (x+1)(x^2-x+1)$

3) $(2x+1)^3+27 =$
$((2x+1)+3)((2x+1)^2-3(2x+1)+9)$

4) $(x^3-6) = (x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+(\sqrt[3]{6})^2)$

المعادلة التربيعية

$\Rightarrow AX^2+bX+C=0 \; ; \; A\neq 0$

⇐ تحليل العبارة التربيعية:

- يجب أن يكون المميز ≥ 0

لكي تتحلل

⇐ المميز $(\Delta) = b^2-4AC$

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4AC}}{2A}$$

⊛ القانون العام.

⇐ إذا كانت إشارة Δ موجبة

Ex

$X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$

$X=2$ $\quad$ $X=6$

⇐ إذا كانت إشارة Δ موجبة عندها تكون إشارة الوسيط مثل إشارة (b)

⇐ إذا كانت إشارة Δ سالبة

Ex: $X^2-X-6=0$

$(X+2)(X-3)=0$

$X=-2$ $\quad$ $X=3$

⊛ إذا كانت إشارة Δ سالبة عندها:

"إذا كان a الذي بالأوس بنفس إشارة (b)"

"نعكس في الثانية العكس بدون تفكير"

Ex: $X^2-2X-7=0$

$\Delta: B^2-4AC \Rightarrow 4-4(1)(-7)$

$\Rightarrow 32$

$\Rightarrow X=\frac{-(-2)\pm\sqrt{32}}{2(1)}$

$X=\frac{2\pm\sqrt{32}}{2}$

$X=\frac{2+\sqrt{32}}{2}$, $X=\frac{2-\sqrt{32}}{2}$

الاتحاد - التقاطع

الاتحاد: $\cup$

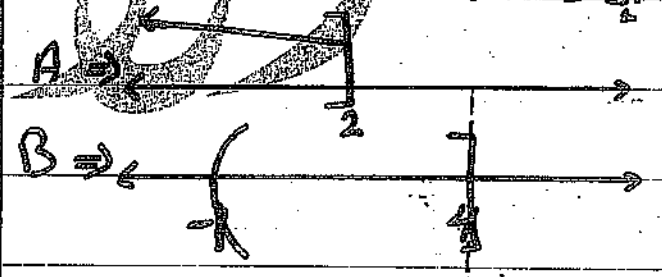
التقاطع: $\cap$

الاتحاد: عبارة عن جميع القيم الموجودة في الفترات المطلوبة.

التقاطع: عبارة عن القيم المشتركة في الفترات المطلوبة.

Ex: $A=(-\infty,2]$ $B=(-1,4]$

الاتحاد: $A\cup B$



$(-\infty,4]$

التقاطع: $A\cap B$

$(-1,2]$

الاقترانات - المطلقة

تعريف:

نساوي ما داخل المطلق بالصفر.

ثم نجد قيم (x) ونضعها على خط الأعداد

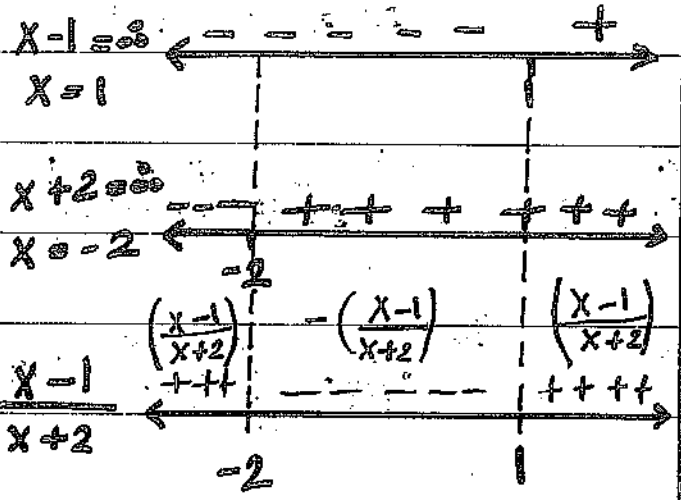
ثم نختبر الإشارة إن كانت موجبة أو سالبة.

موجبة: يبقى الاقتران كما هو.

سالبة: نضرب الاقتران بسالب.

Ex: $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$

نجد تعريف المطلق كما سبق ثم نضع الإشارات لكل عبارة داخل المطلق كما في الصورة



* خواص - القيمة - المطلقة

1) $|x| = b$
$\Rightarrow x = \pm b$

2) $|x| \leq b$
$\Rightarrow -b \leq x \leq b$

3) $|x| \geq b$
$\Rightarrow -b \geq x \quad , \quad b \leq x$

4) $(\sqrt{x})^2 = x$ ⊛ توسيع الجذر إزالة

5) $\sqrt{x^2} = |x|$ ⊛ تجذير التربيع إطلاق

* قوانين - الأسس.

1) $A^{-b} = \frac{1}{A^b}$ ⊛ Ex: $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

2) $A^b * A^c = A^{(b+c)}$ ⊛ Ex: $2^4 * 2^5 = 2^9$

3) $\frac{A^b}{A^c} = A^{(b-c)}$ ⊛ Ex: $\frac{2^4}{2^2} = 2^{(4-2)} = 2^2 = 4$

4) $(A^b)^c = (A^c)^b = A^{(c*b)}$

Ex: $(2^4)^2 = (2^2)^4 = (4)^4 = 256$

5) $(A * K)^b = A^b * K^b$

Ex: $(2 * \sqrt{3})^2 \Rightarrow (2)^2 * (\sqrt{3})^2 = 4 * 3 = 12$

6) $\left(\frac{A}{K}\right)^b = \frac{(A)^b}{(K)^b}$ ⊛

Ex: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(2)^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$

7) $(A)^{\frac{c}{b}} = \sqrt[b]{(A)^c}$

Ex: $(x)^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{(x)^6}$

Ex: $(x)^{\frac{7}{2}} = \sqrt{(x)^7}$

Ex: $(x)^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{(x)^{\frac{3}{5}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{(x)^3}}$

8) $(A)^{\circ} = 1$

⊛ الإقتران :- "function"

≈ كل عنصر بالمجال (Domain) له صورة واحدة بالمدى [Range]، ممكن أكثر من عنصر لهم نفس الصورة.

⊛ إقتران "1-1" : واحد لواحد !

لا يوجد أكثر من عنصر له نفس الصورة

≈ يتم التعرف على أن "function" إقتران، أو على أنه "relation" غير إقتران = # Not_function

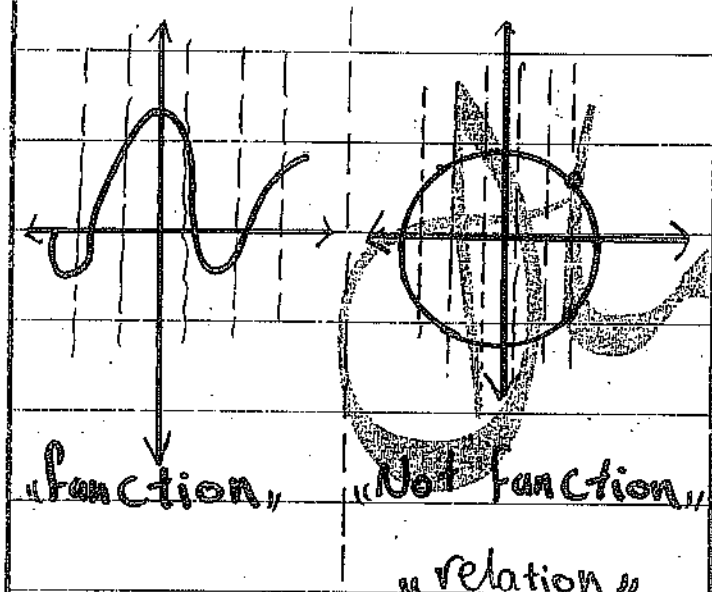
من خلال إختبار الخط الرأسي !vertical line test!

≈ لا يجوز أن تقطع خطوط الإختبار الإقتران في أكثر من نقطة

يعني بإختصار

≈ إذا قطعت خطوط الإختبار الإقتران بنقطة واحدة في جميع نقاط المنحنى عندها يكون إقتران

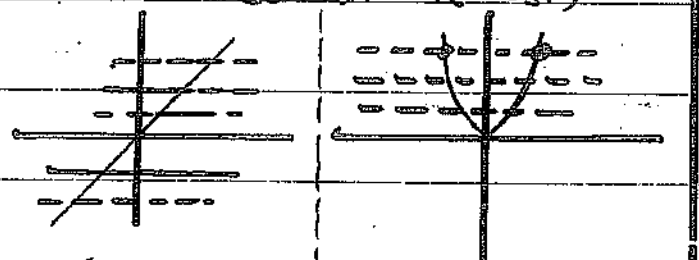
≈ أو إذا قطعت بأكثر من نقطة "خطوط الإختبار" عندها يكون "علاقة"



"function" | "Not function"

"relation"

≈ يتم التفريق بين إقتران (1-1) من خلال إختبار الخط الأفقي (Horizontal line test)



(1-1) | Not (1-1)

مكتبة خواطر

Q: Classify the following function or not function «relation»

1) $y = x^2 + 2x + 1$

⇒ function

* ملاحظة: "بتبوق وزنها ذهب"
⇐ أي اقتران يوضع على شكل $f(x, y)$ مطلق أي توبيخ يعتبر «relation»

2) $y - 3 = |x|$

⇒ function

3) $|y| + x^2 = 5$

[relation]

4) $x + 3y^2 = 5$

[relation]

5) $x^2 + y - 3 = x$ [function]

6) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

[معادلة الدائرة] [relation]

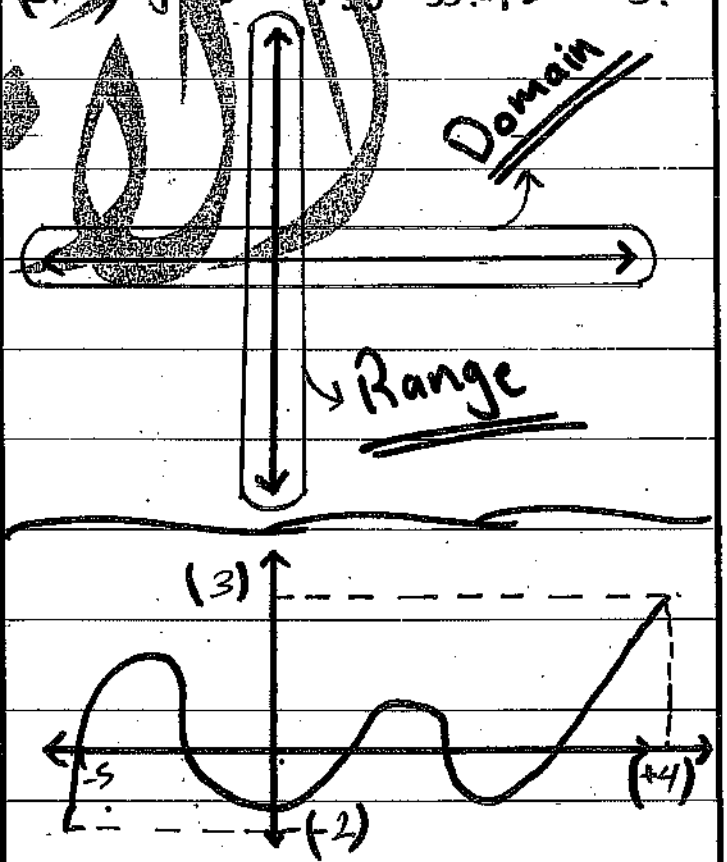
Domain & Range

⇐ مجموعة قيم «x»

⇐ مجموعة قيم «y» يكون تعويضها بالاقتران

Domain

Range



Domain ⇒ [-5, 4]

Range [-2, 3]

Domain

(A) Polynomials كثيرات الحدود

1) $y = x+1 \Rightarrow \mathbb{R}$

داخلاً كل كثيرات الحدود $\mathbb{R}$

2) $f(x) = x^2+2x+1 \Rightarrow \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^6+2x+4x^3 \Rightarrow \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2} \Rightarrow \mathbb{R}$

(B) Roots odd الجذور الفردية $\sqrt[n]{f(x)}$

داخلاً مجال = مجال ما داخل الجذر

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x} \Rightarrow$ Domain x^2+2x

$\Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow$ Domain $f(x)$

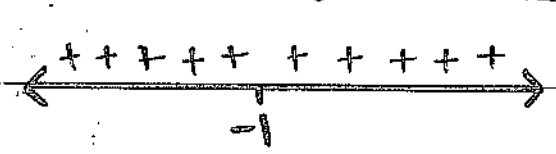
(C) Roots even الجذور الزوجية $\sqrt[n]{f(x)}$

داخلاً مجال ≥ 0

1) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+2x+1}$

$\Rightarrow x^2+2x+1 \geq 0$

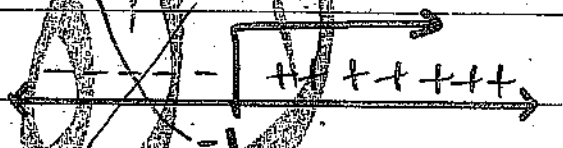
$(x+1)(x+1) \geq 0$ $\quad x=-1$



Dom $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$\Rightarrow 2x+1 \geq 0$ $\quad x = \frac{-1}{2}$

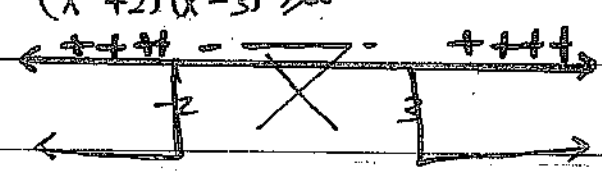


Dom $= [\frac{-1}{2}, \infty)$

3) $f(x) = \sqrt[8]{x^2-x-6}$

$x^2-x-6 \geq 0$ $\quad x=-2 \;/\; x=3$

$(x+2)(x-3) \geq 0$



Dom $= (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

⇐ للتسهيل: هناك قاعدة جاهزة للاقتران.

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{a - x^2}$

$\Rightarrow Dom \; [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$\Rightarrow \underline{Dom} \Rightarrow [-\sqrt{25}, \sqrt{25}]$

$\Rightarrow [-5, 5]$

② $f(x) = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow \underline{Dom}$

$\Rightarrow \underline{Dom} \; [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

③ $f(x) = \sqrt[3]{7 - x^2} \Rightarrow \underline{Dom}$ IR

(انتبه) ⇐ هنا الجزء فردي.

ملاحظة: ⇐ IR ∩ IR ⇐ IR

[فترة] ∩ R ⇐ [فترة]

[فترة] ∩ [فترة] ⇐ هنا نحل استعلام للفترتين ثم نأخذ القيم المشتركة.

4) $f(x) = \sqrt{5x - x^2 - 6}$

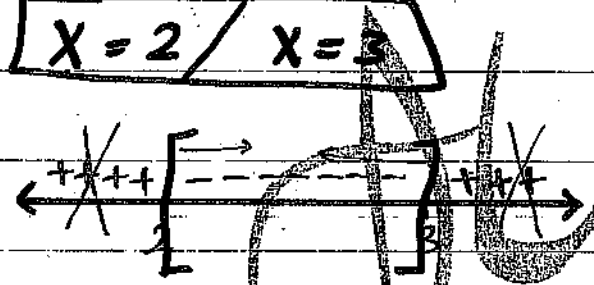
$\Rightarrow 5x - x^2 - 6 \geq 0$

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0$ (انتبه: عكس الجهة)

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$ (بسالب تعاكس إشارة المتباينة)

$(x - 2)(x - 3) \leq 0$

$x = 2 \quad / \quad x = 3$



Then: $\underline{Dom} \; [2, 3]$

5) $f(x) = \sqrt{2 - |x + 3|}$

$\Rightarrow 2 - |x + 3| \geq 0$

$\Rightarrow 2 \geq |x + 3|$

$\Rightarrow -2 \leq x + 3 \leq 2$

$\Rightarrow -5 \leq x \leq -1$

$\Rightarrow \underline{Dom} \; [-5, -1]$

مكتبة خواطر

⇐ إقترانين بينهما جمع أو طرح
أو ضرب نأخذ المجال (Domain)
المشترك بينهما تقاطع "∩"

Ex:- $\underbrace{\sqrt{1-|x-1|}}_{①} - \underbrace{\sqrt{x+1}}_{②}$

$D_① \Rightarrow 1-|x-1| \geq 0 \Rightarrow 1 \geq |x-1|$

$\Rightarrow 1 \geq x-1 \geq -1$
$\quad +1 \quad +1 \quad +1$

$\Rightarrow 2 \geq x \geq 0 \Rightarrow D_① = [0, 2]$

$D_② \Rightarrow x+1 \geq 0, \; x \geq -1 \Rightarrow [-1, \infty)$

$D_{f(x)} \Rightarrow D_① \cap D_②$

$\Rightarrow [-1, \infty) \cap [0, 2]$

$\Rightarrow [0, 2]$

Then:- نأخذ المجال المشترك

⇐ إقترانين بينهما قسمة
نأخذ مجال الأول تقاطع مجال الثاني
باستثناء أصفار المقام.

⇐ أصفار المقام:

⇐ نساوي المقام بالصفر ونحقق (X)
وتكون هي أصفار المقام

Ex:- $f(x) = \underbrace{(\sqrt{2x+2})}_{①} + \underbrace{(x^2-2x)}_{②}$

find Domain? $f(x)$

$D_① \Rightarrow 2x+2 \geq 0, \; x \geq -1$

$\Rightarrow [-1, \infty)$

$D_② \Rightarrow \mathbb{R}$

Then:- $D_{f(x)} \Rightarrow [-1, \infty) \cap \mathbb{R}$

$\Rightarrow [-1, \infty)$

Ex:- $f(x) = \underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{①} \cdot \underbrace{\sqrt{x-1}}_{②}$

$D_① \Rightarrow [-3, 3]$

$D_② \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow [1, \infty)$

$D_{f(x)} = D_① \cap D_②$

$D_{f(x)} \Rightarrow [1, \infty) \cap [-3, 3]$

$D_{f(x)} \Rightarrow [1, 3]$

Ex:- find the domain f(x)

$\Rightarrow f(x) = \frac{[x+3]}{[x-3]}$ ① / ②

$D_1 = \mathbb{R}$ $D_2 = \mathbb{R}$

$\Rightarrow x-3=0$ ⇐ أصفار المقام

$x=3$

$Df(x) = D_1 \cap D_2 / - \{$أصفار المقام$\}$

$\Rightarrow \mathbb{R} / \{3\}$

Ex:- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5}{x+1}}$ ① / ②

جذر تكعيبي ⇐ مجال = مجال ما داخل الجذر

$\Rightarrow D_1 \Rightarrow \mathbb{R}$ / ⇐ أصفار المقام

$D_2 \Rightarrow \mathbb{R}$ / $x+1=0$

$x=-1$

$\Rightarrow Df(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-1\}$

$Df(x) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

Ex:- $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ ① + ② / ③

$D_1 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$[2, \infty)$

$D_2 \Rightarrow \mathbb{R}$ / $D_3 = \mathbb{R}$

$x-5=0$ ⇐ أصفار المقام

$x=5$ $\Rightarrow D_{f(x)} = \mathbb{R} \cap [2,\infty) - \{5\}$

$\Rightarrow Df(x) = [2,\infty) - \{5\}$

⊛ كتابة الإقران للقيمة المطلقة على شكل متشعب

Ex:- $f(x) = |x-1|$

$\Rightarrow x-1=0$; $x=1$

$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

⊗ ملاحظة هامة جداً: "دير بالك"

لا لا لا لا لا لا لا تلعب بالاقتران

علا بدك إطلع المجال (Dom) ⊜

في دير بالك يكمن توقع دهنول

نموذج إقتران المجال

① $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} \neq \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$

② $(\sqrt{x})^2 \neq x$

⇒ Find Domain ?

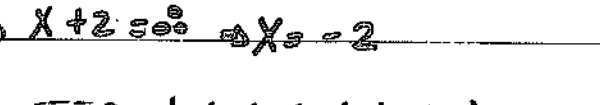
⇒ $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

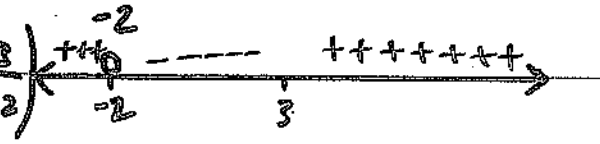
هلأ لازم إشارة إبط كال $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$

& اختام كال

⇒ $x-3 \Rightarrow \boxed{x=3}$ ■

⇒ $x+2=0 \Rightarrow x=-2$





$\frac{x-3}{x+2}$

Dom $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} \mapsto (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$

#

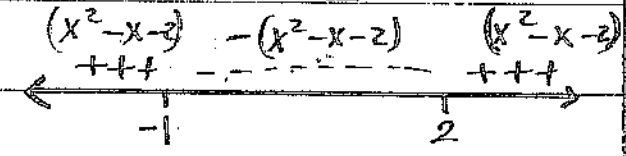
خارج القيمة المطلقة .....

Ex: $f(x) = |x^2 - x - 2|$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$\boxed{x=-1 \ , \ x=2}$



$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2+x+2 & , -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-x-2 & , x < -1 \cup x \geq 2 \end{cases}$

⊗ ملاحظة بنسوى وزنها ألماس

⇐ دائماً مجال إقتران القيمة المطلقة

مجال ما داخلها

Ex: Find Domain

⇒ $f(x) = |x-2|$ ⇒ Dom طلعلي

Dom ⇒ $x-2 \Rightarrow \mathbb{R}$

مكتبة خواطر

نكشة مع

Range of function

① $f(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow$ IR

$\Rightarrow$ Range :-

① نجد رأس القطع $\Leftarrow$ مخرج $\Leftarrow$ $\frac{-b}{2a}$ ثم

نعوضها بـ $f(x)$ فيكون رأس القطع :-

$\Leftarrow \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

عندها يكون المدى كالتالي :-

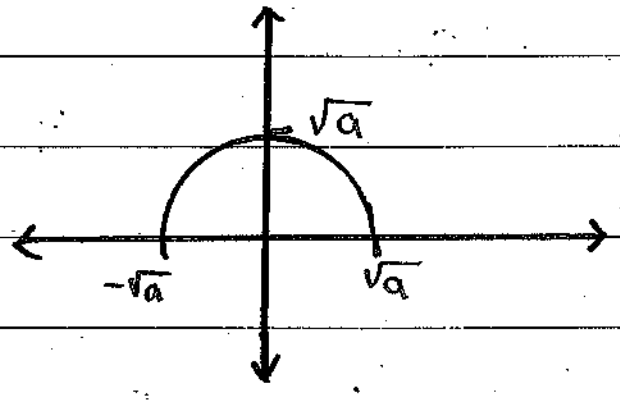
Range $\Rightarrow [f(\frac{-b}{2a}), \infty) \Leftarrow a > 0$

Range $\Rightarrow (-\infty, f(\frac{-b}{2a})] \Leftarrow a < 0$

② $f(a) = \sqrt{a - x^2}$

$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$\Rightarrow$ Range $\Rightarrow [\infty, \sqrt{a}]$



مثال شامل على ما أخذناه :-

$f(x) = \underbrace{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}_{①} + \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x-2}}{3 - |x+1|}}_{④}$ ② ③

$D_① \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq \infty$

$(x-1)(x-1) \geq \infty \Rightarrow \boxed{x = 1}$

+ + + + + + + +

$\therefore D_① = IR$

$D_② \Rightarrow$ مجال ما داخل الجذر

$\Rightarrow \therefore IR$

$D_③ \Rightarrow IR$ $\Leftarrow$ مجال ما داخل الجذر التكعيبي

$D_④ \Rightarrow D_② \cap D_③ - \{$أصفار المقام$\}$

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ أصفار المقام

$3 - |x+1| = \infty, \quad |x+1| = 3$

$x + 1 = 3 \quad / \quad x + 1 = -3$

$\boxed{x = 2} \quad / \quad \boxed{x = -4}$

$\Rightarrow R - \{-4, 2\}$ #

ملاحظة هامة

⇐ يمكن تطبيق العمليات الحسابية في حالة زيادة المقدار أو ضربهم أو طرحهم أو قسمتهم

⇐ طريقة الحل:

نضع الاقتران المعروف المدى Range له بداخل متباينة ونربطه بالرقم الذي يظهر في نهاية شكل الاقتران بالطرفين ليظهر المدى Range له.

Find :- Domain and Range

① $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$

Dom :- $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Range :- $[0, \sqrt{3}]$

② $f(x) = \sqrt{16 - 9x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{9\left(\frac{16}{9} - x^2\right)} \Rightarrow 3\sqrt{\frac{16}{9} - x^2}$

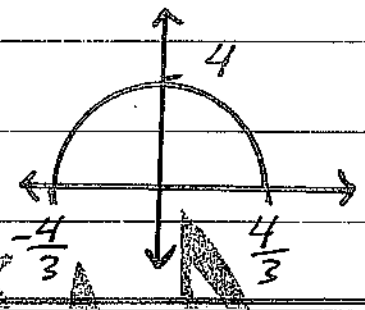
$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

$\Rightarrow$ Range

Range $\frac{4}{3} \geq \sqrt{\frac{16}{9} - x^2} \geq 0$ /*3

$\Rightarrow 4 \geq 3\sqrt{\frac{16}{9} - x^2} \geq 0$

$\Rightarrow$ Range $\Rightarrow [0, 4]$



③ $f(x) = x^2 - x - 12$

$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Range $\Rightarrow$ نوجد $\Rightarrow \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-(-1)}{2(1)}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)$ & $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{-49}{4}$

$\therefore$ Range $\Rightarrow \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty\right)$ $\Leftarrow (a > 0)$ بما أن

$\Rightarrow$ Range $\left[\frac{-49}{4}, \infty\right)$

مكتبة خواطر

(نكتة مخ)

④ $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow$ IR

$\Rightarrow$ Range $\Rightarrow$ نقول

$\left(\frac{-b}{2a}\right) \Rightarrow \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2$

$\therefore f(-2) = 9$ وبما أن $a < 0$

Range $:= (-\infty, f(\frac{-b}{2a})]$

$\Rightarrow (-\infty, 9]$

⑤ $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$

في هذه الحالة نخرج المجال ونعوض هذه القيمة المحدودة مثلاً (2)

$\therefore$ Dom $\Rightarrow [2, \infty)$

$\therefore$ Range :-

$f(2) = 3 \Rightarrow [3, \infty)$

⑥ IF $f(x) = \frac{1}{1 + (g(x))^2}$

Find the range $f(x)$

; If Range $g(x)$ $[1, 2]$

(ملاحظة هامة):

عند ضرب المتباينة بسالب نقلب إشارة المتباينة. ومنه:

$1 \geq g(x) \geq 1$

$4 \geq (g(x))^2 \geq 1$

$5 \geq 1 + (g(x))^2 \geq 2$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+(g(x))^2} \leq \frac{1}{2}$

$f(x)$

$\therefore \frac{1}{5} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Range $f(x) = [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$

⑦ $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + 4$

⑧ $f(x) = \sqrt{x-5} + 2$

⑨ $f(x) = x^2 - 6x + 7$

الإجابة:

⑦ $\Rightarrow$ Dom $[-2, 2]$ Range $[4, 6]$

⑧ $\Rightarrow$ Dom $[5, \infty)$ Range $[2, \infty)$

⑨ $\Rightarrow$ Dom IR , Range $[-2, \infty)$

2 Composition of Function

الاقترانات التركيبية

داخلي خارجي
$(f \circ g)(x) \Rightarrow f(g(x))$
داخلي خارجي
$(g \circ f)(x) \Rightarrow g(f(x))$
الناتج

نستخدم لإيجاد القاعدة
$(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$

⊛ إيجاد المجال :-

عند مجال الاقتران الداخلي
وتقاطعه مع مجال الاقتران الناتج

Ex:- $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1-x}$
Then find Dom $(f \circ g)$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x))$
$\Rightarrow (\sqrt{1-x})^2 = 1-x \Rightarrow$ Dom $\mathbb{R}$
ناتج
$\cap$ Dom $g(x)$
داخلي
$\Rightarrow 1-x \geq 0$
$\Rightarrow x \leq 1$ ←++++| 1 |— ×
$\Rightarrow (-\infty, 1]$
$\therefore$ Dom $(f \circ g)(x)$
$\Rightarrow \mathbb{R} \cap (-\infty, 1] \Rightarrow (-\infty, 1]$

Ex:- Find the Formula of $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$
If $f(x) = x^2 - 1$
$g(x) = \sqrt{3-x}$?

⊛ ضع في كل نوض كان كل (x) بالاقتران الخارجي نضع مكانه الداخلي كاملة

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x))$
$\Rightarrow (\sqrt{3-x})^2 - 1 \Rightarrow 3-x-1$
$= \boxed{2-x}$ #
$\Rightarrow (g \circ f) = g(f(x))$
$\Rightarrow \sqrt{3-x^2+1} = \boxed{\sqrt{4-x^2}}$ #

Ex:- Find the $(fog)(x)$ and domain $(fog)(x)$ for:

1) $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ / $g(x)=\frac{2}{x}$

$(fog)(x)=f(g(x))$

$\Rightarrow f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{3*\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)-1}$

$\Rightarrow \frac{\frac{6}{x}}{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow \boxed{\frac{6}{2-x}}$

$\Rightarrow$ Domain $g(x) \Rightarrow R-\{0\}$

Dom $f(g(x)) \Rightarrow R-\{2\}$

Dom $(fog)(x) \Rightarrow R-\{0\} \cap R-\{2\}$

$\Rightarrow R-\{0,2\}$

2) $f(x)=\frac{x-2}{x}$ / $g(x)=\frac{1}{x+3}$

$\Rightarrow f(g(x))=\frac{\left(\frac{1}{x+3}\right)-2}{\left(\frac{1}{x+3}\right)}$

$\Rightarrow \frac{1-2x-6}{\frac{x+3}{1}}{\frac{1}{x+3}} = -2x-5$

$\Rightarrow$ Dom $f(g(x)) \Rightarrow R$

$\Rightarrow$ Dom $g(x) \Rightarrow R-\{-3\}$

$\Rightarrow$ Dom $(fog)(x) \Rightarrow R-\{-3\}$

3) $f(x)=\sqrt{x-2}$ / $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))$

$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{x^2-1}-2}$

Dom $g(x) \Rightarrow x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, x \leq -1$

$\Rightarrow$ Dom $f(g(x)) \Rightarrow \sqrt{x^2-1}-2 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq 2 \Rightarrow x^2-1 \geq 4$

$x^2 \geq 5$, $x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Dom $g(x) \cap$ Dom $f(g(x))$

$\Rightarrow (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$

Ex:- Find Dom f(x)

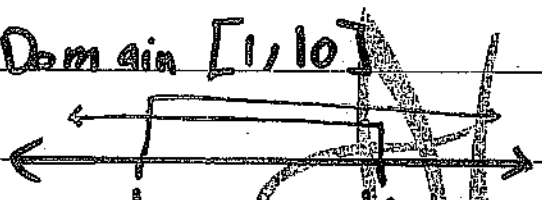
$= \sqrt{3-\sqrt{x-1}}$ داخلي، خارجي

Dom الداخلي $\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\Rightarrow 3-\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 3 \geq \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow 9 \geq x-1 \quad , \quad x \leq 10$

$\Rightarrow$ Domain $[1, 10]$



أحياناً إذا كان لدينا خارجي نوض داخلي بالخارجي مثلاً $f(2x+1)$

نفرض ما داخل الخارجي y والأمثلة التالية توضح ذلك:-

Ex:- $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 10x + 5$

$f(x) = 2x+1$ find $g(0)$ ؟

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 6x^2 - 10x + 5$

$\Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) + 1$

$\Rightarrow 6x^2 - 10x + 5 = 2g(x) + 1$

$\Rightarrow 2g(x) = 6x^2 - 10x + 4$

$\Rightarrow g(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$\Rightarrow g(0) = 2$

⊗ ممكن يكون على $(f \circ g)$ واحد الاقترانات إما داخلي أو خارجي ويكون قالب الاقتران الآخر يكون اكس كالتالي:-

- مثلاً لو $(f \circ g)$ وحدد ماذا يمين الداخلي أم خارجي:-
- إذا كان يمين الداخلي نوض الاقتران الداخلي مكان x باخارجي ونجد الاقتران الداخلي.

Ex:- $f(x)=5x-1$, $g(x)=\frac{x}{2+x}$

Then find $f(g(1))$

$\Rightarrow g(1)=\frac{(1)}{2+(1)}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{3})=5(\frac{1}{3})-1$

$\Rightarrow \frac{5}{3}-\frac{3}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$

Ex:- $f(x)=x^3+1$, $g(x)=\sqrt{x}$

Find $(g\circ g)(81)$

$\Rightarrow g(g(81))$

$\Rightarrow g(81)=\sqrt{(81)}=\boxed{9}$

$\Rightarrow g(9)=\sqrt{9}=\boxed{3}$

Ex:- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $g(1)=5$

Find $(f\circ g)(1)$

$g(1)=5 \Rightarrow f(5)=\frac{1}{\sqrt{5+4}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{9}}=\boxed{\frac{1}{3}}$

Ex:- $g(x)=2x-3$,

$(f\circ g)(x)=x^2+5$, find $f(x)$ ؟

الحل

$\rightarrow (f\circ g)(x)=x^2+5 \Rightarrow f(g(x))$

$\Rightarrow f(2x-3)$

$y=2x-3 \Rightarrow y+3=2x$

$\boxed{x=\frac{y+3}{2}}$

$\Rightarrow f(y)=\left(\frac{y+3}{2}\right)^2+5$

جبنا (x,y) رجوز عنهما بنبدل

$\Rightarrow$ x بـ y و y بـ x

$\rightarrow f(x)=\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+5$ #

$\Leftarrow$ التأكد: (فقط إلك) عشان

نوعي مكان x بـ $g(x)$ لازم يطلع

$(f\circ g)(x)$

$\Rightarrow f(g(x))=\left(\frac{g(x)+3}{2}\right)^2+5$

$f(g(x))=\left(\frac{2x}{2}\right)^2+5 \Rightarrow (x^2+5)$

#

كسر مسن

Q $f(x) = \frac{6}{x-2}$, Then the domain $(fof)(x)$ is?

عشان اطلع Domain $(fof)(x) = (f(f(x)))$ ← الناتج

لـ داخل

لازم اقاطع الداخلي Domain مع الناتج

(الناتج)

$$f(f(x)) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-2}\right)-2} = \frac{6}{\frac{6-2(x-2)}{(x-2)}} = \frac{6(x-2)}{6-2x+4} \rightarrow$$

$$\rightarrow = \frac{6(x-2)}{10-2x} \rightarrow R \rightarrow R$$

$$R \cap R - \left\{ \begin{array}{l} 10-2x=0 \\ 10=2x \\ x=5 \end{array} \right\} = R - \{5\}$$

الداخلي $f(x) = \frac{6}{x-2} \rightarrow R \rightarrow R$ $\quad R \cap R - \left\{ \begin{array}{l} x-2=0 \\ x=2 \end{array} \right\}$

$R - \{2\}$

$$Dom\,(fof)(x) = R - \{5\} \cap R - \{2\}$$

$$= R - \{2, 5\}$$

خط : عبدالله دياك

صفحة : [ ]

مكتبة خواطر

* Find :-

x	1	2	3	4
f(x)	2	4	3	2
g(x)	3	1	2	1

① $(f \circ g)(1) \Rightarrow f(g(1))$

$g(1) = 3 \Rightarrow f(3) = \boxed{3}$

② $(f \circ f)(2) \Rightarrow f(2) = 4$

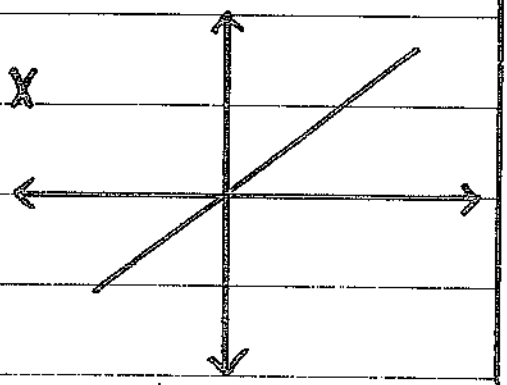
$\Rightarrow f(4) = \boxed{2}$

③ $(g \circ f)(1) \Rightarrow f(1) = 2$

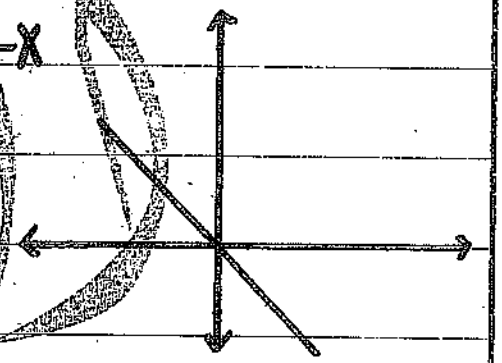
$g(2) = \boxed{1}$

رسمات - بعض - الاقترانات
Graphs of some function

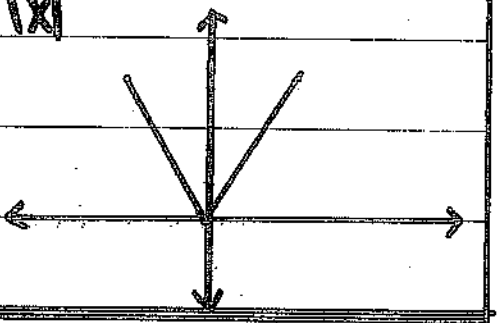
[1] $f(x) = x$



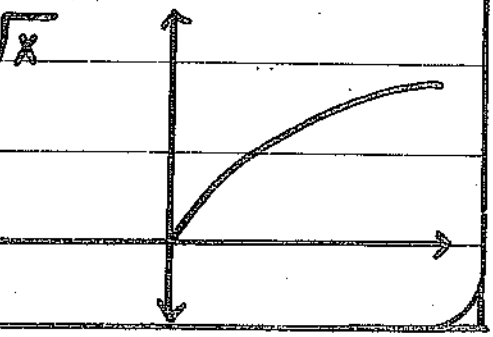
[2] $f(x) = -x$



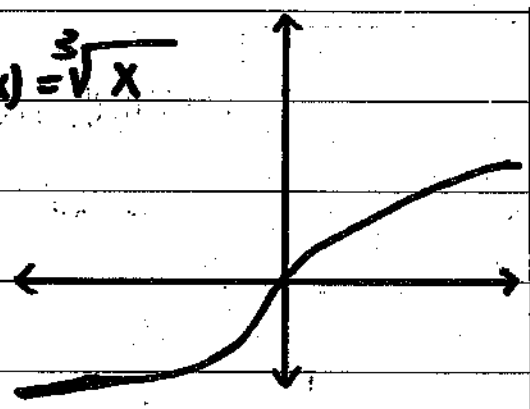
[3] $f(x) = |x|$



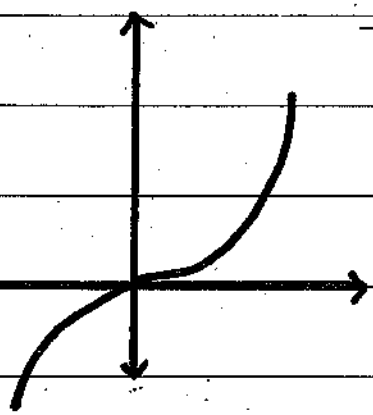
[4] $f(x) = \sqrt{x}$



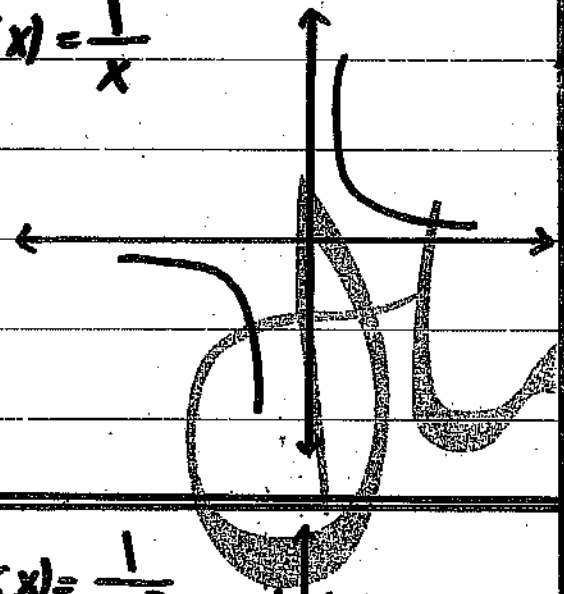
5) $f(x)=\sqrt[3]{x}$



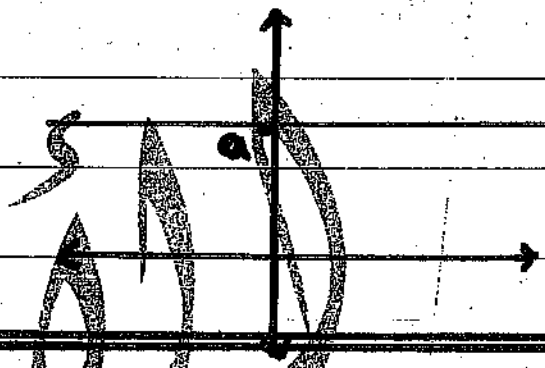
9) $f(x)=x^3$
x^5
x^7
⋮



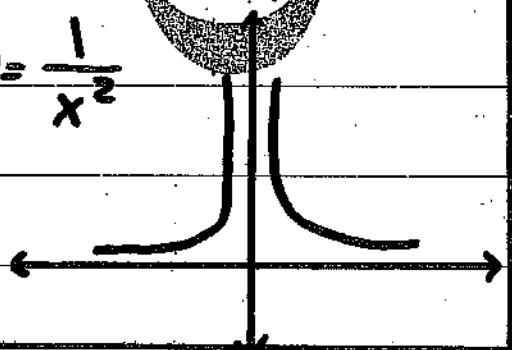
6) $f(x)=\frac{1}{x}$



10) $f(x)=a$, a: ثابت



7) $f(x)=\frac{1}{x^2}$



* Symmetry: التماثل
وهو ثلاث أنواع

① About X-axis

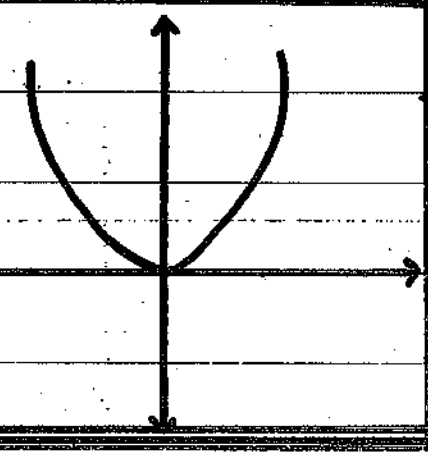
⇐ لو كان مكان (y) ← (-y) ويجب أن يكون الطرف

مثال

$x=y^2+1$

$\Rightarrow x=(-y)^2+1 \Rightarrow \boxed{y^2+1}$

8) $f(x)=x^2$
x^4
x^6
x^8
⋮



Ex: $y = x^5 - 1$ where is the function symmetric or not symmetric (niether).

⇒ ① about x-axis

$\Rightarrow (-y) = x^5 - 1$

$\Rightarrow -y = x^5 - 1$

⇒ (not symmetric about x-axis)

⇒ ② about y-axis

$y = (-x)^5 - 1$

$\Rightarrow y = -x^5 - 1$

⇒ not symmetric about (y-axis)

⇒ ③ about origen

$\Rightarrow (-y) = (-x)^3 - 1$

$\Rightarrow -y = -x^3 - 1$

$-y = -(x^3 + 1) \Rightarrow \boxed{y = x^3 + 1}$

⇒ not symmetric about origen

⇒ Then niether symmetric

② About y-axis

نوض مكان (x) ← (-x) ويجب أن يكون نفس الاقتران مثال

$\rightarrow y = x^2 + 2$

$\Rightarrow y = (-x)^2 + 2 \Rightarrow x^2 + 2$

③ About the origen

نوض مكان (x) ← (-x) و (y) ← (-y) ويجب أن يكون نفس الاقتران

مثال

$y = x^3 + x$

$\Rightarrow (-y) = (-x)^3 + (-x)$

$\Rightarrow -y = -x^3 - x \Rightarrow -y = -(x^3 + x)$

$\Rightarrow y = x^3 + x$

ملاحظة: ممكن يكون:

niether symmetric

يعني لا هاي ولا هاي

«symmetric»

مكتبة حواطر

#Odd-and-Even functions

* لمعرفة إذا الإقتران odd نعوض مكان $x \leftarrow -x$ لازم يخرج معنا الإقتران نفسه مضروب بسالب

* الطريقة الثانية:- نعوض مكان $(x) \leftarrow (-x)$ ومكان $(-x) \leftarrow (x)$ يجب أن يخرج الإقتران كما هو

* ملاحظة ①:- أي إقتران odd :- Symmetric about origen

* ملاحظة ②:-

إشتغل على الطريقة الأولى أسهل بالكل.

Ex:- $f(x) = x^3 - 5x$ ؟

$\Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 5(-x)$

$\Rightarrow -x^3 + 5x \Rightarrow -(x^3 - 5x)$

$f(x)$

Then $f(x)$ odd function

* لمعرفة إذا الإقتران even نعوض مكان $x \leftarrow (-x)$ ويجب أن يخرج نفس الإقتران ✓

* ملاحظة:- أي إقتران even Symmetric about y-axis

Ex $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x} = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+(-x)}$

$\Rightarrow \frac{-x^3}{-(x^2+x)} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2+x} \Rightarrow f(x)$

Then $f(x)$ even function.

* ممكن يكون الاقتران
neither odd & even

Exe- classify the following function as even or odd or niether ?

① $f(x) = x^2 \Rightarrow (-x)^2 = x^2$ ∴ even
② $f(x) = x^3 \Rightarrow (-x)^3 = -x^3$ ∴ odd
③ $f(x) = |x^3 + x|$
$\Rightarrow |(-x)^3 + (-x)| \Rightarrow |-x^3 - x|$
$= |-(x^3 + x)| = |x^3 + x|$
∴ even

④ $f(x) = x^4 + 2 \Rightarrow (-x)^4 + 2$
$= x^4 + 2$ ∴ even

⑤ $f(x) = x^3 + 5 \Rightarrow (-x)^3 + 5$
$\Rightarrow -x^3 + 5$ ∴ niether

⑥ $f(x) = \frac{x}{x^2 + x}$

$\Rightarrow \frac{(-x)}{(-x)^2 + (-x)} \Rightarrow \frac{-x}{x^2 - x}$

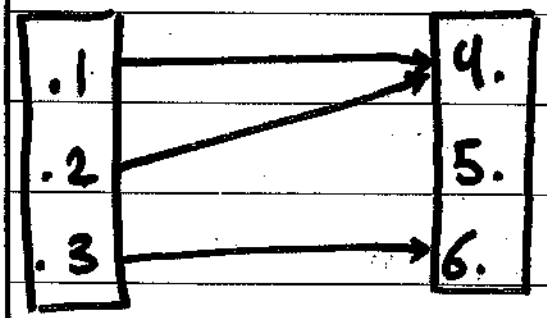
$\Rightarrow \frac{-x}{-(-x^2 + x)} = \frac{x}{-x^2 + x}$ ∴ niether

Inverse-function
الاقترانات العكسية

* يكفي للاقتران أن يكون one to one لكي يكون له Inverse
لذا كان كل عنصر في Domain له صورة واحدة في Range.

* الاقتران العكسي يختلف عن تعريف الاقتران العادي من حيث أن الاقتران العادي ممكن يكون من عنصر في Domain لـ صورة واحدة في Range ولا يلزم ذلك إنه كل one to one اقتران ولكن عكس ذلك ليس دائماً

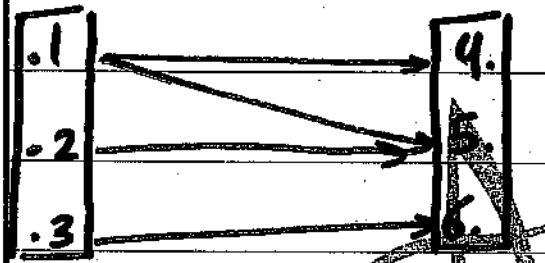
مكتبة خواطر



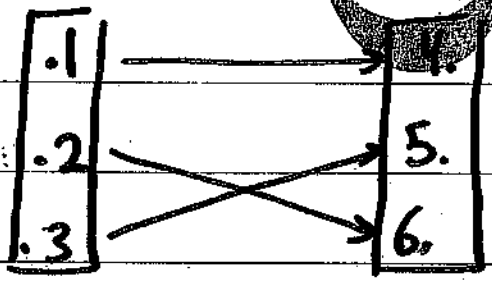
Dom Range

function

* يتم التمييز من الرسم إذا كان اقتران واحد لواحد عن طريق الرسم من خلال "Horizontal line test" تم شرحه في صفحة (15) بالأسفل.



not function (relation)



function & one to one

* ملاحظة: شرط one to one بالكتاب

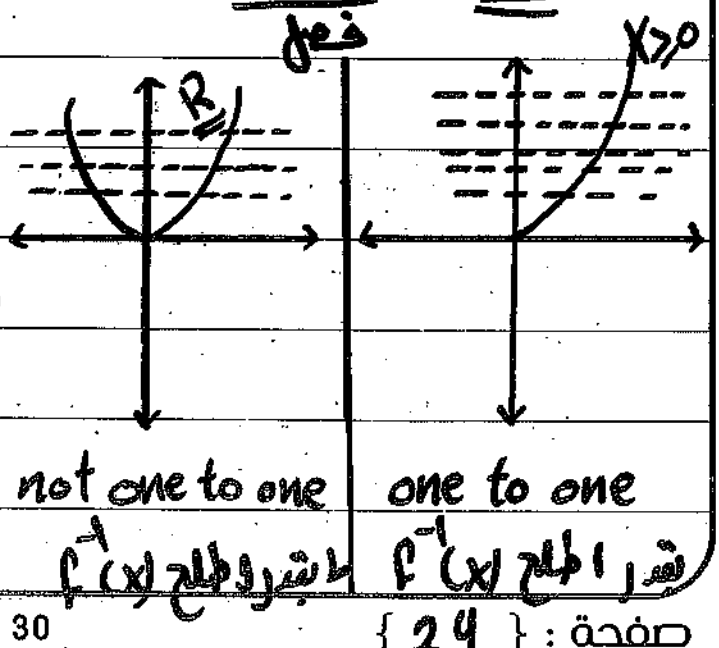
$f(x_1) \neq f(x_2)$

$x_1 \neq x_2$

* من الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$

* كل اقتران عكسه اقتران أعلى اقتران عكسي يجب أن يكون "one to one" إذا كان يكون "not one to one" يكون عامل

فعل مثل: $f(x) = x^2, x \geq 0$ فعل



not one to one

لا يقبل طلع $f^{-1}(x)$

one to one

يقبل طلع $f^{-1}(x)$

* طرق لعرض السؤال بالامتحان:

Ways to give the question in the exam.

1. Find $f^{-1}(x)$ if $f(x)=\dots\dots$
2. Find $f^{-1}(a)$
3. Find x if $f^{-1}(x)=a$
4. Find Dom & Range $f(x)$
5. Find Dom & Range $f^{-1}(x)$

Ex:- Find $f^{-1}(x)$ if $f(x)=4+\sqrt{2x+1}$

الحل

① $y=4+\sqrt{2x+1}$

② $y-4=\sqrt{2x+1} \Rightarrow (y-4)^2-1=2x$

$\frac{(y-4)^2-1}{2}=x$

③ $f^{-1}(x)=\frac{(x-4)^2-1}{2}$

$f^{-1}(x)=\frac{(x-4)^2}{2}-\frac{1}{2}$

ممكن يكون بطلب الصيغة الأولى

الامتحان فيه دائمًا

---

* طريقة الحل ①

⇒ Find $f^{-1}(x)$ if $f(x)=\dots\dots$

$y \leftarrow f(x)$ ①

② بحل x موضح للقانون

ويُؤتى بـ x لوحدها "

③ يتم استبدال x بـ $f^{-1}(x)$

$x \leftarrow y$

Ex:- Find $f^{-1}(x)$ if $f(x)=\frac{x+4}{x-5}$

① $y=\frac{x+4}{x-5}$

② ضرب تبادلي

$y(x-5)=x+4$

$\Rightarrow yx-5y=x+4$

$\Rightarrow yx-x=4+5y$

$\Rightarrow x(y-1)=4+5y$

$\Rightarrow x=\frac{4+5y}{(y-1)}$

③ $f^{-1}(x)=\frac{4+5x}{x-1}$

$\Rightarrow y+14=(x-4)^2$

$\Rightarrow \sqrt{y+14}=|x-4|$

⇐ هنا بالنسبة للسؤال هو طالب بالسؤال أكبر من 4 عندها بنوفذ موجب كأن طالب أصغر بنوفذ سالب

⇐ حسب تعريف المطلق ⇒

$\hookrightarrow x>4 \Rightarrow x-4=\sqrt{y+14}$

Then

$\Rightarrow x=\sqrt{y+14}+4$

$\hookrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+14}+4$

Ex- Find $f^{-1}(x)$ for

$f(x)=6x-x^2,\ x>3$

الحل ① $y=6x-x^2$

$\Rightarrow -y=x^2-6x$

نظم ونضيف $\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$

$-y=x^2-6x+9-9$

$9-y=(x-3)^2$

⇐ ممكن خلاج طريقة إسمها إكمال مربع في الخطوة الثانية "x موضع المطلق" إذا كان بـ $f(x)$ يوجد x^2 و x

⇐ الخطوات :- ① نجعل معامل x^2 موجب واحد.

② نضيف ونطرح $\left(\frac{x\text{ معامل}}{2}\right)^2$

③ نتم الحل كما أفعل في الأعلى والسنتم توضيح ذلك :-

Ex- Find $f^{-1}(x)$ if $f(x)=x^2-8x+2,\ x>4$??

الحل

① $y=x^2-8x+2$

② $y-2=x^2-8x$

نضيف ونطرح $\left(\frac{-8}{2}\right)^2$ كم منه 16

$\hookrightarrow y-2=x^2-8x+16-16$

Ex:- $f(x) = x^5 + 4x - 7$

find $f^{-1}(-7)$?

$\Rightarrow -7 = f(x) \Rightarrow$

$-7 = x^5 + 4x - 7$

$\Rightarrow x^5 + 4x = 0$

$x(x^4 + 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0$, $x^4 + 4$ لا تحلل

then $f^{-1}(-7) = 0$

$\Rightarrow 9 - y = (x-3)^2$

$\Rightarrow \sqrt{9-y} = |x-3|$

بما أن $x > 3$

$\Rightarrow \sqrt{9-y} = x - 3$

$\Rightarrow \sqrt{9-y} + 3 = x$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{9-x} + 3$ #

Ex:- Find $f^{-1}(5)$ for $f(x) = x^3 + 6$??

$f^{-1}(5) \Rightarrow 5 = f(x)$

$\Rightarrow 5 = x^3 + 6 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x = -1$ ، $x^2 - x + 1$ لا تحلل

$f^{-1}(5) = -1$ #

Find $f^{-1}(a)$

$f^{-1}(y) \Rightarrow x \Rightarrow f(x) = y$

$f^{-1}(\quad)$ عبارة عن x دائماً

x عبارة عن y داخل

③ (*) طريقة حل ⇐

* Find $\underline{x}$ if $f^{-1}(x)=9$

← نأخذ $f^{-1}(x)$ عبارة عن $\underline{x}$ في $f(x)$

Exa- $f(x)=3x^2+2x+4$

Then find $\underline{x}$ if $f^{-1}(x)=1$?

$\Rightarrow f^{-1}(x)=1=\underline{x}$

$\Rightarrow f(x)=3x^2+2x+4$

$\Rightarrow f(1)=3(1)^2+2(1)+4=9$

Exa- $f(x)=x^3+2x^2+x+1$ find $\underline{x}$ if $f^{-1}(x)=2$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=2=x$

$\Rightarrow f(2)=(2)^3+2(2)^2+2+1$

$=8+8+2+1=19$

Exa- $f(x)=\frac{2x+1}{4x^5+2x^2}$ find $\underline{x}$ if $f^{-1}(x)=-1$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=-1=x$

$\Rightarrow f(-1)=\frac{2(-1)+1}{4(-1)^5+2(-1)^2}$

$\Rightarrow \frac{-1}{-4+2}=\frac{-1}{-2}=\boxed{\frac{1}{2}}$ *

Exa- $f(x)=2x^5+8x+1$ if $f^{-1}(2c^5)=c$ Then find the constant c ?

$\Rightarrow f(x)=2x^5+8x+1$

$\Rightarrow 2c^5=2c^5+8c+1$

$\Rightarrow 8c=-1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{-1}{8}}$ *

⑤ و ⑥ طريقة حل

⇐ find Domain & Range $f(x)$

⇐ find Domain & Range $f^{-1}(x)$

ملحوظة مهمة جداً

① $f^{-1}(5) = x$

⇐ بأخذ " f " للطرفين :-

$f(f^{-1}(5)) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 5 \therefore \boxed{x = 1}$

② $f^{-1}(8) = x$

⇐ بأخذ " f " للطرفين :-

$f(f^{-1}(8)) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 8 \therefore \boxed{x = 4}$

③ $f(6) = x$

⇐ بأخذ " f^{-1} " للطرفين :-

$f^{-1}(f(6)) = f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 6 \therefore \boxed{x = 2}$

④ $f(7) = x$

⇐ بأخذ " f^{-1} " للطرفين :-

$f^{-1}(f(7)) = f^{-1}(x)$

$7 = f^{-1}(x) \therefore \boxed{x = 3}$

① Dom $f(x)$ = Range $f^{-1}(x)$

② Range $f(x)$ = Dom $f^{-1}(x)$

③ $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

if, $x \in$ Dom $f(x)$

④ $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

if, $x \in$ Dom $f^{-1}(x)$

Ex :- Given that "f" has an inverse

$f^{-1}(3) = 7$, $f^{-1}(2) = 6$, $f(1) = 5$

Then :- find :-

① $f^{-1}(5)$ ④ $f(7)$

② $f^{-1}(8)$

③ $f(16)$

مكتبة خواطر

Ex:- $f(x)=\frac{x-2}{x+4}$, Then Find Dom & Range (f, f^{-1})

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R \cap R-\{x+4=0\}$

$\Rightarrow R-\{-4\}$

$\Rightarrow$ Dom $f(x)$ = Range $f^{-1}(x)$

$= R-\{-4\}$

$\Rightarrow y=\frac{x-2}{x+4} \Rightarrow xy+4y=x-2$

$\Rightarrow xy-x=-2-4y$

$\Rightarrow x(y-1)=-2-4y$

$\Rightarrow x=\frac{-2-4y}{(y-1)} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2-4x}{x-1}$

$\Rightarrow$ Dom $f^{-1}(x) = R \cap R-\{x-1=0\}$

$\Rightarrow R-\{1\}$

$\Rightarrow$ Dom $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

$= R-\{1\}$

Ex:- $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^3}$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R-\{x=0\}$

$\Rightarrow$ Dom $f(x)$ = Range $f(x)$

$\Rightarrow R-\{0\}$

$\Rightarrow y=\frac{(x+1)^3}{x^3} \Rightarrow y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{y}=\frac{x+1}{x} \Rightarrow \sqrt[3]{y}\,x=x+1$

$\Rightarrow \sqrt[3]{y}\,x-x=1 \Rightarrow x(\sqrt[3]{y}-1)=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{y}-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$\Rightarrow$ Dom $f^{-1}(x) = R \cap R-\{\sqrt[3]{x}-1=0\}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=1$

$x=(1)^3 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ Dom $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

$\Rightarrow R-\{1\}$

Q : $f(x) = x^3 + 2x - 31$, Then $f^{-1}(2)$

(a) -2 (b) 2 (c) -3 (d) 3

دائما ان جبلك $f^{-1}(a)$ بدل a مكان $f(x)$ الأصلية يعني $a = f(x)$

Then

$2 = x^3 + 2x - 31 \rightsquigarrow 0 = x^3 + 2x - 33$

اسهل اشي نجرب الخيارات في الضبع دائرة ، بشوف مين الي بحقق المعادلة

بالتجريب في الخيار (d) $= 3$

$0 = (3)^3 + 2(3) - 33 \rightsquigarrow 0 = 27 + 6 - 33 \rightsquigarrow 33 - 33 = 0$

معناته الجواب هو (d) بعد التجربة

مكتبة خواطر

Ex:- $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

$\Rightarrow Dom\ f(x) = Range\ f^{-1}(x)$

$= \mathbb{R}$

$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x^3+1} \Rightarrow y^3=x^3+1$

$\Rightarrow y^3-1=x^3$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{y^3-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$

$\Rightarrow Dom\ f^{-1}(x) = Range\ f(x) = \mathbb{R}$

نكتة مع

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$ Then

find $f^{-1}(x)$ and dom & Range ?

$\Rightarrow Range\ f^{-1}(x) = Dom\ f(x) = \mathbb{R}-\{0\}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{x} \Rightarrow yx=1 \Rightarrow x=\frac{1}{y}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow Dom\ f^{-1}(x) =$

$Range\ f(x) = \mathbb{R}-\{0\}$.#

« الأطال »

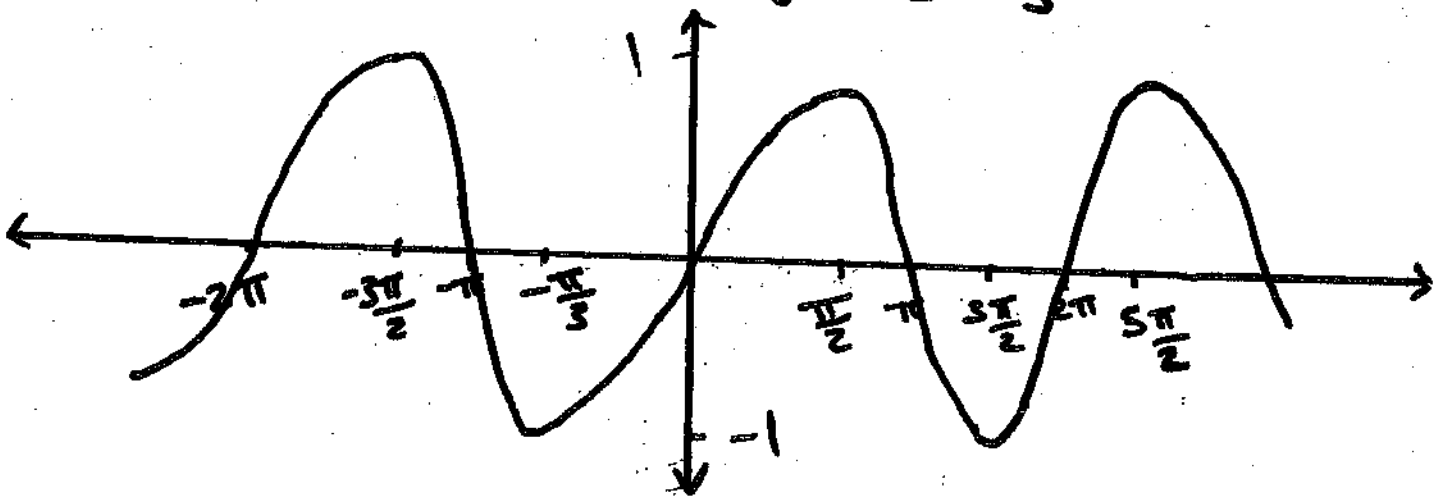
إعداد :- أيمن الزيود »

Trigonometric - function :

* الاقترانات المثلثية.

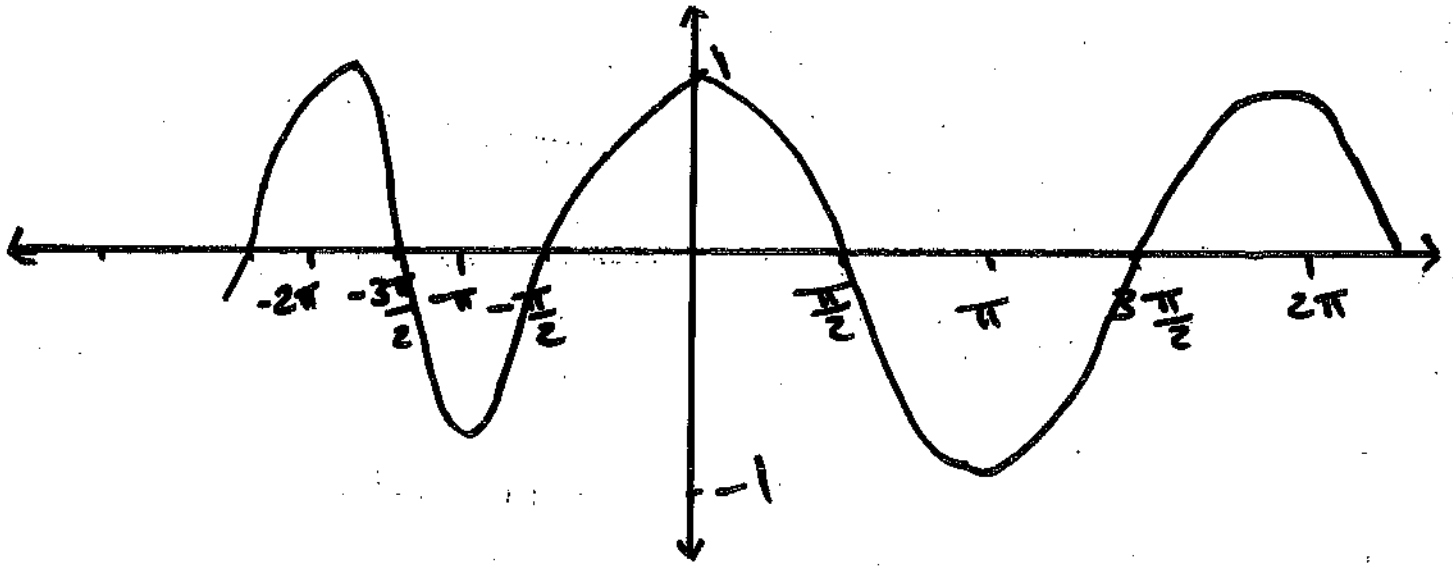
$Df(x) = \sin(x) =$ المقابل / الوتر $\Rightarrow$ Dom $\longrightarrow$ R

Range $\longrightarrow [-1,1]$



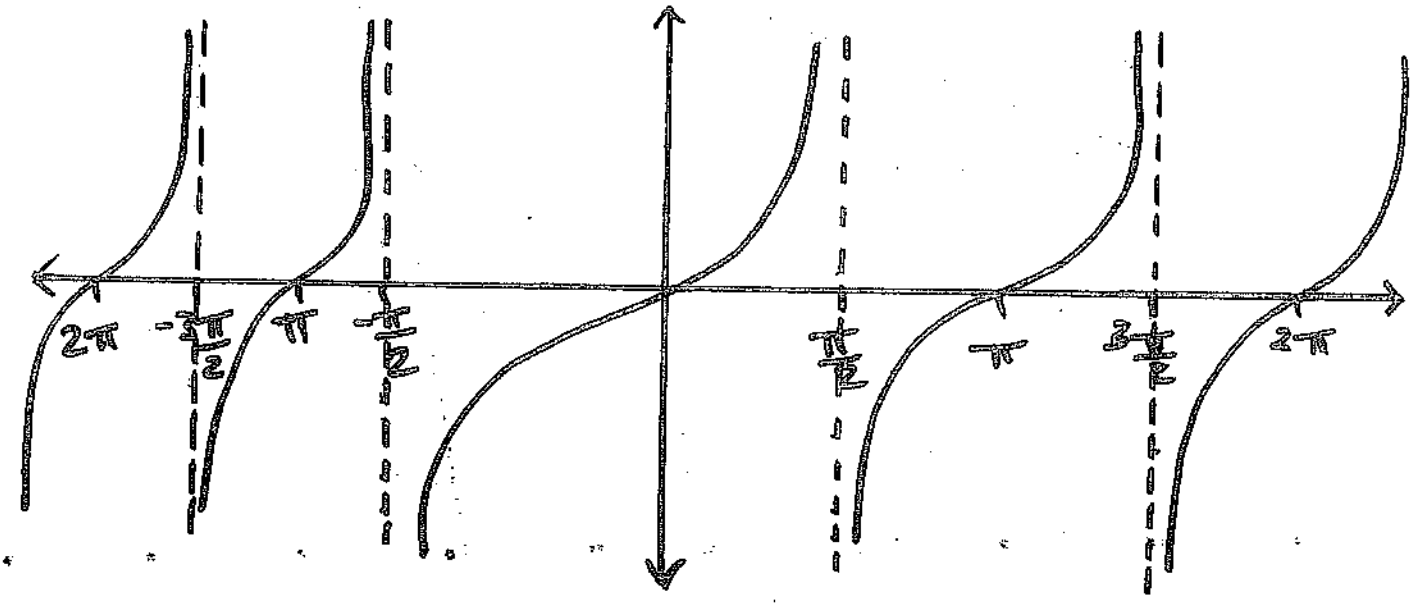
② $f(x) = \cos(x) =$ المجاور / الوتر $\Rightarrow$ Dom $\longrightarrow$ R

Range $\longrightarrow [-1,1]$



③ $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ⇒ Dom → $\mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\}$

Range → $\mathbb{R}$



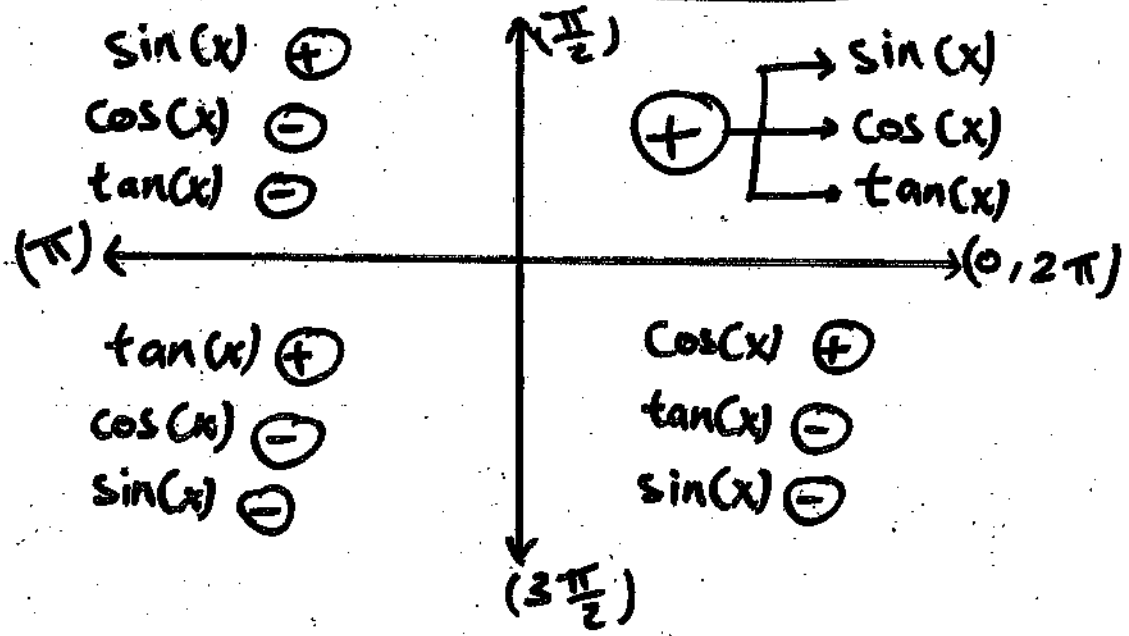
④ $f(x) = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

⑤ $f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

⑥ $f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

«الأطال»

إعداد: أيمن الزيود «



X	0,2π	π/2	π	3π/2
sin(x)	0	1	0	-1
cos(x)	1	0	-1	0
tan(x)	0	∅	0	∅

X	π/6	π/4	π/3
sin(x)	1/2	1/√2 = √2/2	√3/2
cos(x)	√3/2	1/√2 = √2/2	1/2
tan(x)	1/√3	1	√3

* $csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$

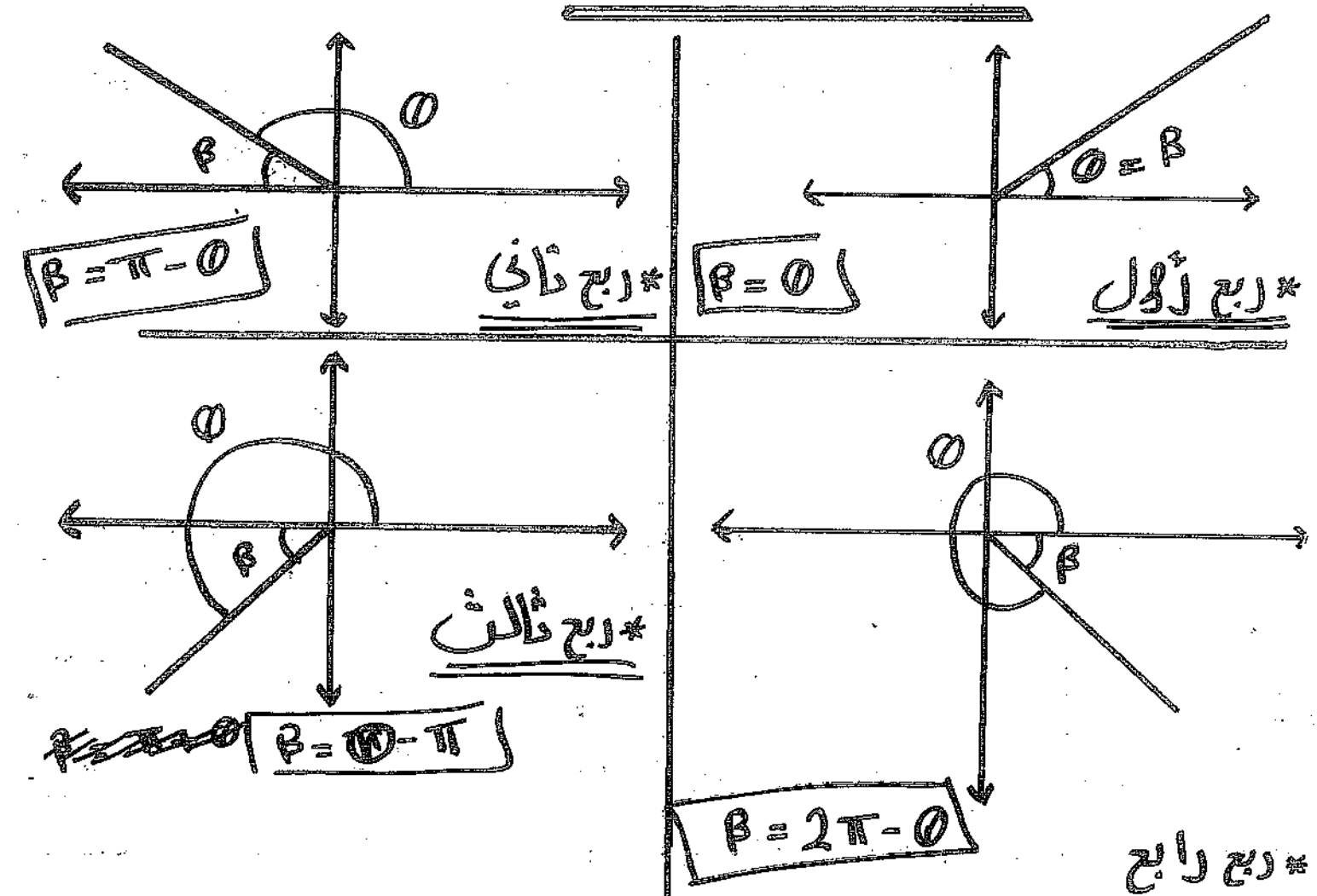
* $sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boxed{\sqrt{2}}$

* $cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

مكتبة خواطر

"الأطلال"

إعداد: "أيمن الزيود"



* ملاحظة: - إذا كانت الزاوية في الربع الثاني أو الثالث أو الرابع تسمى زاوية المرجع.

* زاوية المرجع: - هي بعد الزاوية عن المحور السيني الأقرب لها (β)

صنعة: ع ع ع

ط: "عيش ثم ديالك"

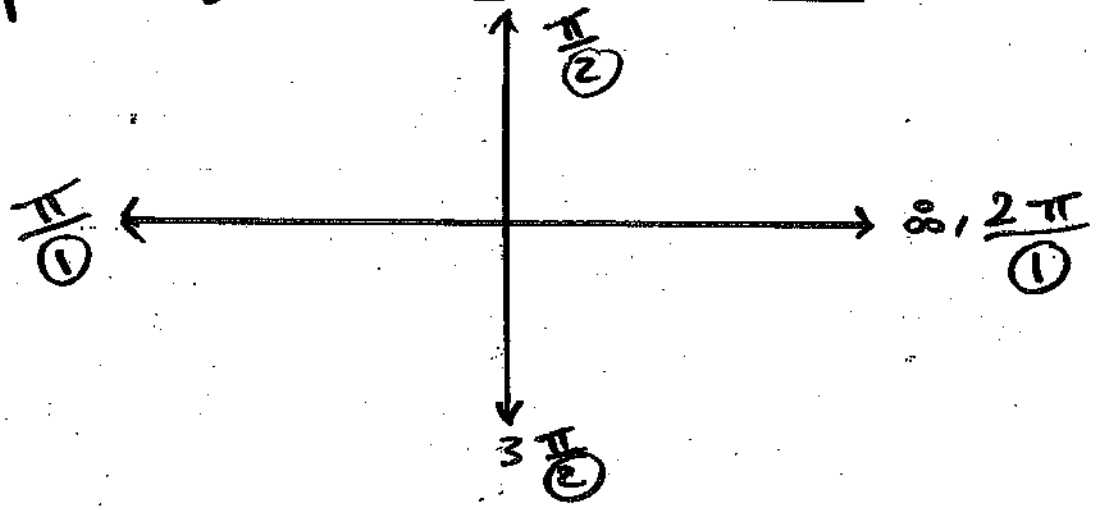
مكتبة خواطر

«الأمثال»

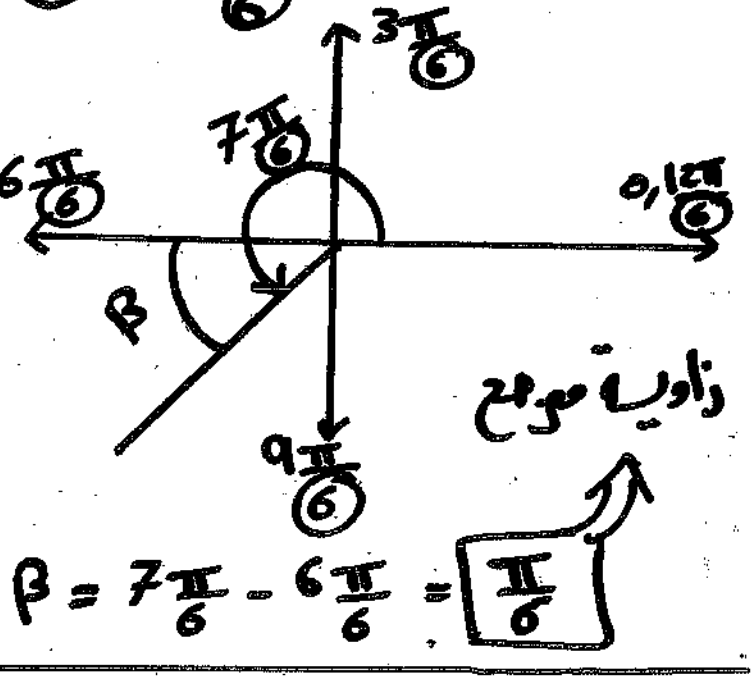
إعداد: «أيمن الزيود»

⇐ طريقة التطبيق لمعرفة في أي ربع الزاوية

Then ⇐ نوجد مقام المحاور ونقارن البسط



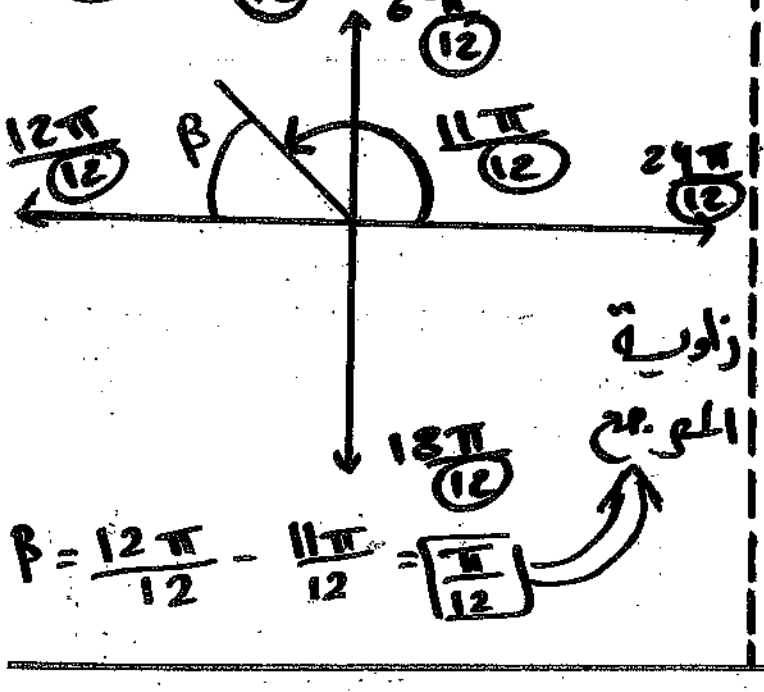
مثلاً الزاوية $\frac{7\pi}{6}$



زاوية مرجع

$\beta = \frac{7\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

فرضاً الزاوية $\frac{11\pi}{12}$



زاوية المرجع

$\beta = \frac{12\pi}{12} - \frac{11\pi}{12} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$

* ملاحظة :-

إذا كانت الزاوية أكبر من 2π عندها نطرح 2π

Ex :- $\sin\frac{13\pi}{6} \Rightarrow \frac{13\pi}{6} > 2\pi$

$\therefore \frac{13\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Ex :- $\cos\frac{13\pi}{6}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

* ملاحظة :- لازم تراعي ربع الزاوية

Ex :- $\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ ② ربع $\Rightarrow \frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \oplus\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ex :- $\cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ ② ربع $\Rightarrow \frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \ominus\frac{1}{2}$

* ملاحظة :-

$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\csc(-x) = -\csc(x)$
$\cot(-x) = -\cot(x)$
} Then odd function

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sec(-x) = \sec(x)$
} even function

* طريقة :-

للتحويل من درجي لريدان

$\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{180}{4} = 45°$ معنا

$\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow \boxed{45°}$

Exe Find

① $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

② $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

③ $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

⑥ $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

⑦ $\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

* ملاحظة على "Dom"

⇒ $\sin(f(x)), \cos(f(x))$

Dom داخلة يساوي

⇒ Domain $f(x)$

⇒ Range $[\sin(f(x)), \cos(f(x))]$

$\Rightarrow [-1, 1]$

⇒ Range $|\sin(f(x))|, |\cos(f(x))|$

$\cos^2(f(x)), \sin^2(f(x))$

$\Rightarrow [0, 1]$

Ex: Find Dom $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$

⇒ Dom داخلة

$\Rightarrow R \cap R - \{x^2 - 4 = 0\}$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{\pm 2\}$

مكتبة خواطر

Ex:- $f(x) = 1 + 3\sin(x)$

$\Rightarrow$ Dom (R)

Ex:- $f(x) = \sqrt{1-\cos(x)}$

$\Rightarrow 1 - \cos(x) \geq 0$

$\Rightarrow \cos(x) \leq 1$

دائماً

* $(\cos)$ أصغر أو يساوي واحد

$\therefore$ مجال $f(x)$ هو (R)

Ex:- $f(x) = \frac{2}{1+\cos(2x)} \to R$

أصفار المقام

$1 + \cos(2x) = 0$

$\cos(2x) = -1$

$\Rightarrow$ الزاوية التي $(\cos)$ لها (-1) هي (π)

Then $\Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

لأن $\cos$ في جميع الزوايا تتكرر دورة كاملة

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi\}$

Ex:- $f(x) = \frac{2}{1+\cos(2x)} \to R$

أصفار المقام

$1 + \cos(2x) = 0$

$\cos(2x) = -1$

الزاوية التي $(\cos)$ لها (-1) هي π

Ex:- Find Dom & Range for $f(x) = \frac{3}{5+\cos(x)}$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R \cap R - \{5+\cos(x)=0\}$

$\therefore$ Dom $f(x) = R$

* Range. بالكلام

$\frac{1}{5+} \geq \cos(x) \geq \frac{-1}{5+}$

$6 \geq 5+\cos(x) \geq 4$

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{5+\cos(x)} \leq \frac{1}{4}$

(ضرب المتباينات لأقلب وجهل)

$\frac{3}{6} \leq \underbrace{\frac{3}{5+\cos(x)}}_{f(x)} \leq \frac{3}{4}$

$\therefore$ Range $\Rightarrow [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

نكشة في ②

Ex:-
If $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=x^2+3$
find $(g\circ f)(\pi)$

$f(\pi)=\sin\pi=0$

$\Rightarrow g(f(\pi))=g(0)=(0)^2+3$

$=\boxed{3}$

Ex:- Classify the function as even or odd or niether

[1] $f(x)=\cos(x) \Rightarrow$ even

[2] $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2-1} \Rightarrow \dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2-1}$

$\Rightarrow \dfrac{-\sin(x)}{x^2-1}=-\left(\dfrac{\sin(x)}{x^2-1}\right)$

$\therefore$ odd

Ex:- Find the Range of $f(x)$?

[1] $f(x)=-3\cos^2 x$

$\hookrightarrow 1\geq\cos(x)\geq-1$

$1\geq\cos^2(x)\geq 0$

$-3\leq -3\cos^2(x)\leq 0$

Range $=[-3,0]$

[2] $f(x)=2-|\sin(x)|$

$1\geq|\sin(x)|\geq 0$

$-1\leq -|\sin(x)|\leq 0$

$-1\leq -|\sin(x)|\leq 0$
$+2 \quad +2 \quad +2$

$1\leq \underbrace{2-|\sin(x)|}_{f(x)}\leq 2$

$\Rightarrow$ Range $f(x)=[1,2]$

3) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^3 - x}$

$\Rightarrow \frac{\cos(-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{\cos(x)}{-x^3 + x}$

$\Rightarrow -\left(\frac{\cos(x)}{x^3 - x}\right) = -f(x)$

∴ odd

⇒ about origen ⇒

$\tan((-x)(-y)) = (-x)^2 - 1$

$\Rightarrow \tan(xy) = x^2 - 1$ ∴ ✓

Then f(x) symmetric about origen. #

نكتة حلو 😊

$\Rightarrow \tan(xy) = x^2 - 1$, where f(x) the symmetric

⇒ about (x-axis)

$\rightarrow \tan(x(-y)) = x^2 - 1 \Rightarrow$

$-\tan xy = x^2 - 1$ ∴ X

⇒ about y-axis ⇒

$\rightarrow \tan((-x)(y)) = (-x)^2 - 1$

$\Rightarrow -\tan xy = x^2 - 1$ ∴ X

"next"
« تابع » « التالي » « الي بعده »

Q The function $f(x) = \frac{\tan^{-1}x}{x^4 + x^2}$ odd or even ?

إذا السؤال بده odd او even معناته لازم كمان $x \leftarrow -x$

odd $\longrightarrow f(-x) \longrightarrow -f(x)$ زي ماهو مضروب بسالب

even $\longrightarrow f(-x) \longrightarrow f(x)$ زي ماهو

$$f(-x) = \frac{\tan^{-1}(-x)}{(-x)^4 + (-x)^2}$$

$$= \frac{-\tan^{-1}(x)}{x^4 + x^2}$$

$$= -f(x)$$

then $f(x)$ is odd

مكتبة خواطر

مثال محلول

Q let $f(x) = 2\sin x + 5$, find Range ?

Range $\begin{matrix}\sin x \\ \cos x\end{matrix}$ $\rightarrow [-1, 1]$ ^2 Range $\begin{matrix}\sin^2 x \\ \cos^2 x \\ |\sin x| \\ |\cos x|\end{matrix}$ $\rightarrow [0, 1]$

نضرب كل معطيين بالمتباينة ونربطها

$1 \geq \sin x \geq -1$

(نضرب بـ 2)

$2 \geq 2\sin x \geq -2$

(نجمع 5)

$7 \geq 2\sin x + 5 \geq 3$

The Range $f(x)$

$\rightarrow [3, 7]$

مكتبة خواطر

"الأطال"

إعداد: "أيمن الزيود"

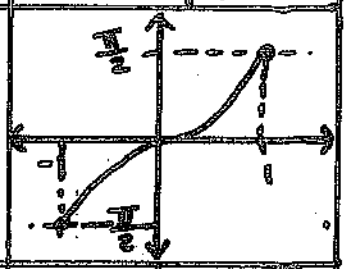
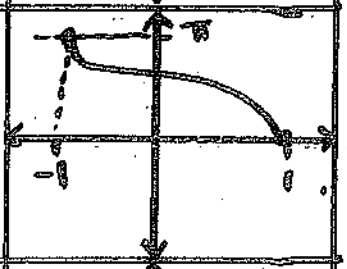
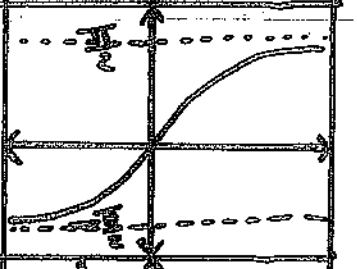
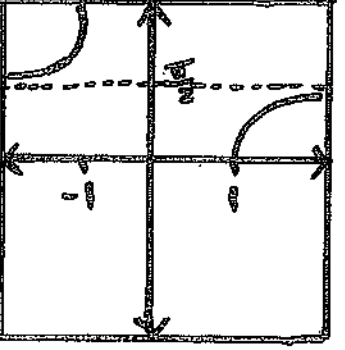
* في حالة الإقترانات المثلثية العكسية .

نحدد مجال $\sin(x)$ ، $\cos(x)$ ، $\tan(x)$

$\sin(x)$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos(x)$: $[0, \pi]$

$\tan(x)$: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

F(x)	Dom	Range	Graph
$\sin^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
$\cos^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
$\tan^{-1}(x)$	$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	
$\sec^{-1}(x)$	$\lvert x\rvert \geq 1 \equiv x \geq 1 \cup x \leq -1$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$	

مكتبة خواطر

⊛ ملاحظة:

في حالة طلب "Dom" خصها (sin⁻¹, cos⁻¹) ⇒ بتكون عادة ظاهر بين [-1, +1]

Ex: find the Dom of the following function?

① $f(x) = 2 - \sin^{-1}(3x+1)$

$\Rightarrow 1 \geq 3x+1 \geq -1$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$0 \geq 3x \geq -2$

$\div 3 \quad \div 3 \quad \div 3$

$0 \geq x \geq -\frac{2}{3}$

Then: the domain $f(x) \Rightarrow [-\frac{2}{3}, 0]$

② $f(x) = \cos^{-1}(5x-2)$

$\rightarrow +1 \geq 5x-2 \geq -1$

$+2 \quad +2 \quad +2$

$3 \geq 5x \geq +1$

$\div 5 \quad \div 5 \quad \div 5$

$\frac{3}{5} \geq x \geq \frac{1}{5}$

Then: Domain $f(x) \Rightarrow [\frac{1}{5}, \frac{3}{5}]$

Ex: The Range of $f(x)$

$f(x) = 2 - \tan^{-1}(x)$

Range $\tan^{-1}x \ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} > \tan^{-1}(x) > -\frac{\pi}{2} \quad *(-1)$

$-\frac{\pi}{2} < -\tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$

$+2 \quad +2 \quad +2$

$2 - \frac{\pi}{2} < 2 - \tan^{-1}(x) < 2 + \frac{\pi}{2}$

$\frac{4-\pi}{2} < 2 - \tan^{-1}(x) < \frac{4+\pi}{2}$

Then: The Range $f(x) \Rightarrow$ مفتوحة $\left(\frac{4-\pi}{2}, \frac{4+\pi}{4}\right)$

أهم أربع قواعد - لمتطابقات الإنفيرس.

① $\sin^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$, $\csc^{-1}$, are odd function

$\Rightarrow \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

$\Rightarrow \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

$\Rightarrow \csc^{-1}(-x) = -\csc^{-1}(x)$

② $\cos^{-1}$ [illegible], $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ neither function

③ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$

④ $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

Ex:-

① $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

(*) ساعي الزاوية إلى الـ sin لما يساوي $\frac{1}{2}$

② $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

③ $\sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \pi - \sec^{-1}(\sqrt{2})$

$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

④ $\tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$

⑤ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

⑥ $\sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}(1) = -\frac{\pi}{2}$

⑦ $\sec^{-1}(-2) = \pi - \sec^{-1}(2)$

$= \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3}$

$= 2\frac{\pi}{3}$

Q let $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{4-|x|}}$ then domain of $f(x)$ is?

$\frac{x-4}{\sqrt{4-|x|}} \rightarrow R$

$\sqrt{4-|x|} \rightarrow 4-|x| \geq 0 \rightarrow 4 \geq |x| \rightarrow 4 \geq x \geq -4$

لـ من خواص المطلق

بما ان 4+ و 4- من اصفار المقام سوف يهم استثناؤهم

$4 > x > -4$ or $(-4, 4)$

Q The Domain $f(x) = \sin^{-1}(2x-1)$ is?

$\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ دائما محصورات ماداخلهم $[-1, 1]$

$1 \geq 2x-1 \geq -1$

$2 \geq 2x \geq 0$

$1 \geq x \geq 0$

$\rightarrow [0, 1]$ Domain $f(x)$

⑧ التبسيط لقاعدة

$f^{-1}of(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ ؛ $x \in Dom\ f^{-1}(x)$

$f\,of^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ ؛ $x \in Dom\ f(x)$

* يوجد حالتين:

* حالة ١

في حالة كان f^{-1} بالداخل وليس f

Ex:- ① $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{7}) = \frac{\pi}{7}$ ∵ $\frac{\pi}{7} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

② $\sin^{-1}(\sin\frac{5\pi}{7})$ ← زاوية ربع ② ← $\sin$ (+)

$\Rightarrow \pi - \frac{5\pi}{7} = \frac{2\pi}{7}$

③ $\sin^{-1}(\sin\frac{7\pi}{4})$

$\Rightarrow \sin^{-1}(\ominus\sin(2\pi - \frac{7\pi}{4}))$

$\sin^{-1}$ odd $\Rightarrow \ominus\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$

زاوية ربع ④

④ $\cos^{-1}(\cos\frac{11\pi}{6})$ ← $\cos$ (+)

$\Rightarrow \cos^{-1}(\cos(2\pi - \frac{11\pi}{6}))$

$\Rightarrow \cos^{-1}(\cos(\frac{\pi}{6})) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

⑤ $\tan^{-1}(\tan\frac{11\pi}{6})$ ← ربع ③ ← $\tan$ (+)

$\Rightarrow \tan^{-1}(\tan(\frac{11\pi}{6} - \pi)) = \frac{3\pi}{6}$

⑥ $\cos^{-1}(\cos\frac{7\pi}{3})$ ← أكبر من 2π ← ربع ①

$\Rightarrow \cos^{-1}(\cos(\frac{\pi}{3})) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

⑦ $\cos^{-1}(\cos\frac{7\pi}{6})$ ← ربع ③ ← $\cos$ (−)

$\Rightarrow \cos^{-1}(\ominus\cos(\frac{7\pi}{6} - \pi))$

$\hookrightarrow \pi - \cos^{-1}(\cos(\frac{\pi}{6}))$

$\Rightarrow \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ ← قانون

مكتبة خواطر

* حالة - 2

* في حالة كان (x^{-1}) بالراديان وليس (ثا)

* معادلة سريعة؟-

$\sin = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ ، $\cos = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$

$\tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ ، $\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$

$\cot = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$ ، $\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}}$

* طريقة الحل:

trig^{-1} عكس trig

① يخلي دائماً ما داخل trig^{-1} بـ x في كل مكان

$x \leftarrow \frac{x}{1}$

② نرسم مثلث قائم الزاوية θ

حيث $\theta = \text{trig}^{-1}$

③ نعين على المثلث أطوال الأضلاع حسب قواعد "وتر، مقابل، مجاور"

أو حسب نظرية فيثاغورس لحد الأضلاع المتبقية

مثال: $\sin^{-1}(x)$ ⟵ مقابل $= x$، وتر $= 1$

⑧ $\cos^{-1}(\sin \frac{11\pi}{6})$

زاوية ربع ④ لـ sin سالب

$\Rightarrow \cos^{-1}(-\sin(2\pi - \frac{11\pi}{6}))$

$\Rightarrow \pi - \cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{6})$ من $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{2}) \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$ *

⑨ $\sin^{-1}(\cos(\frac{5\pi}{4}))$ ربع ③

$\Rightarrow \sin^{-1}(-\cos(\frac{5\pi}{4} - \pi))$

$\Rightarrow -\sin^{-1}(\cos \frac{\pi}{4})$ من $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow -\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$ *

⑩ $\sec^{-1}(\sec(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$

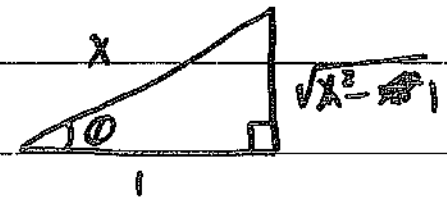
* جاهزة ← ربع ①

مكتبة خواطر

$(وتر)^2 = (مقابل)^2 + (مجاور)^2$

* $\tan(\sec^{-1}(x)) = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1}$ ← وتر

$\tan(\sec^{-1}(\frac{x}{1})) = \sqrt{x^2-1}$

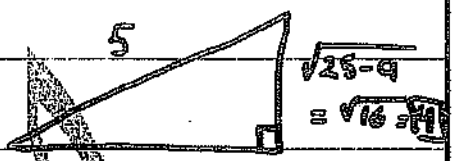


$\sin^{-1}(x)$ ← مقابل / وتر

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{1}, \cos\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

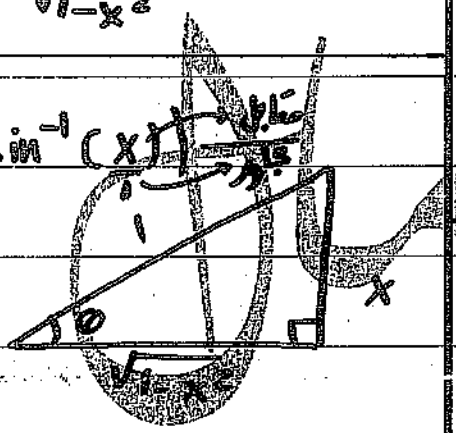
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\sin(\sec^{-1}(\frac{5}{3}))$ ← وتر / مجاور



$\therefore \sin(\sec^{-1}(\frac{5}{3})) = \boxed{\frac{4}{5}}$

* $\cos(\sin^{-1}(x))$ ← مقابل / وتر



$\Rightarrow \therefore \cos(\sin^{-1}(\frac{x}{1})) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

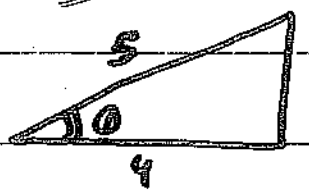
Ex: $\sec(\sin^{-1}(-\frac{3}{5}))$

$\Rightarrow \sec(-\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ ← مقابل / وتر

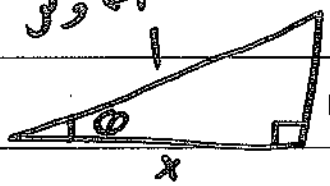
$\Rightarrow \sec(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$

$\Rightarrow$ [illegible]

$= \boxed{\frac{5}{4}}$



* $\sin(\cos^{-1}(x)) = \sin(\cos^{-1}(\frac{x}{1}))$ ← وتر / مجاور

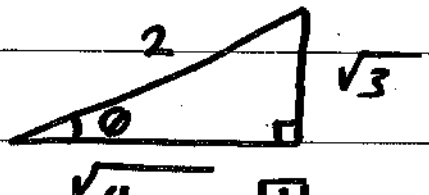


$\therefore \sqrt{1-x^2}$

Ex:- $\tan\left(\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$\Rightarrow \tan\left(-\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$ وتر / مقابل

$\Rightarrow -\tan\left(\csc^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\sqrt{3}$



[3] قاعدة:

$$\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

* شروط إضافية

[1] $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

[2] $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

[3] $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

[4] $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$

[5] $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$

[6] $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

[7] $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$= 2\cos^2(x) - 1$
$= 1 - 2\sin^2(x)$

[8] $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

[9] $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

[10] $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

[11] $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

كسر في سر

Q The exact value of $\cos^{-1}(\cos(\frac{3\pi}{4}))$?

دائما إذا اعطاني $Trig^{-1}(Trig(\ldots))$ بحل إلي جوا وبطلع للي برا

$\cos(\frac{3\pi}{4})$ (ربع ثاني) $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ال cos بالربع الثاني سالب معناته $\cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

(قاعدة) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

بس حل ثاني ان تشطب $\cos^{-1}$ مع cos لان $\frac{3\pi}{4}$

ضمن مجال cos

$\cos^{-1}(\cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4}$

فيديو سريع كسلاي

Q $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

لاحظ هون ما بنفع اشطبهم لان $\frac{3\pi}{4}$ مش من مجال sin فرح اصل عالطريقة الأصلية

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$ (ربع ثاني)

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sin موجب في الربع الثاني

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{+1}{\sqrt{2}}$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

مكتبة خواطر

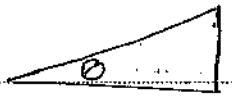
كمل مش مش

Q $\sin(\cos^{-1}(x))$

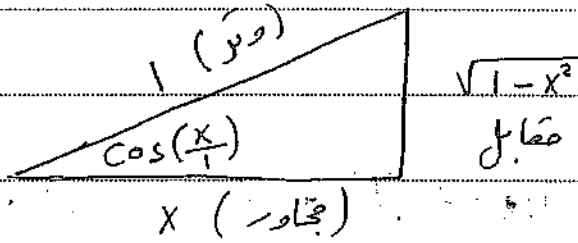
دائما إذا Trig(Trig⁻¹(_)) بعمل إلي جوا بسط ومقام

$\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\right)$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)$ بعمل مثلث



$\cos = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$



فطالب في السؤال sinθ معناته $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

Then $\sin(\cos^{-1}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$

صفحة: [ ] خط : عبدالله دياك

مكتبة خواطر

مثلثات
كسلة

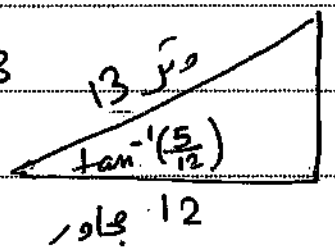
Q $\sin\left(\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$

$\tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

بعمل مثلث

الوتر $= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$



$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

$\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)\right) = \frac{5}{13}$

مكتبة خواطر

إلى متى ... إلى متى ...
سيبقى الحب والحنان
لا يهرب من ملل ...
الحبيبة والغنى
إلى متى ... إلى متى ...

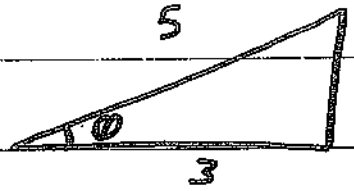
* Def.. exponential Function:
* إلها قوانين الأسي.

$f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$
في الشبه x^2 وصفات تتغير بتغير مجال إلها قوانين.

Ex: $\sin(2\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$

$\Rightarrow \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
متطابقة ضعف الزاوية.

$\Rightarrow 2\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$



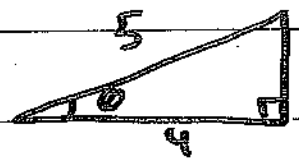
$\Rightarrow 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

Ex:- $\cos(2\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$

$\Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\Rightarrow (\cos(\sin^{-1}\frac{3}{5}))^2 - (\sin(\sin^{-1}\frac{3}{5}))^2$

$\Rightarrow (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$



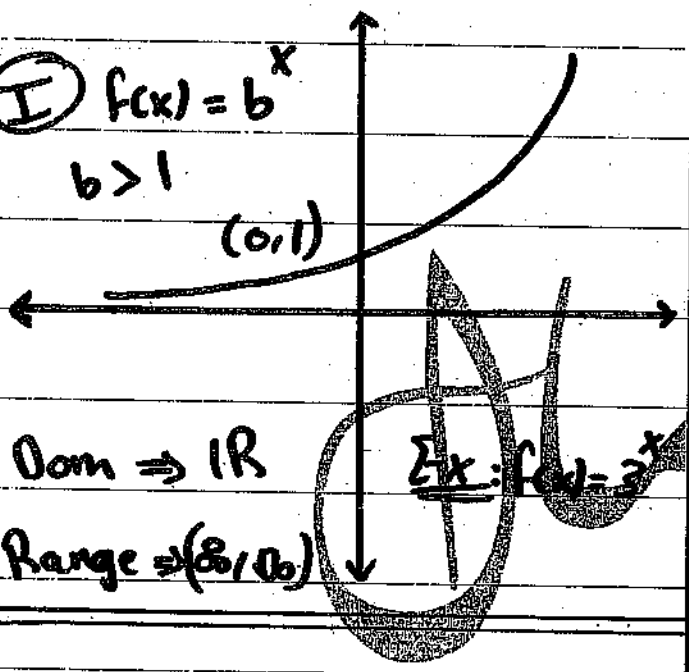
* في حالة كانت $b = e \approx 2.78$ «أمثلة»

$f(x) = (3)^x$, $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

⇒ Graphs: «رسومات»

(I) $f(x) = b^x$

$b > 1$

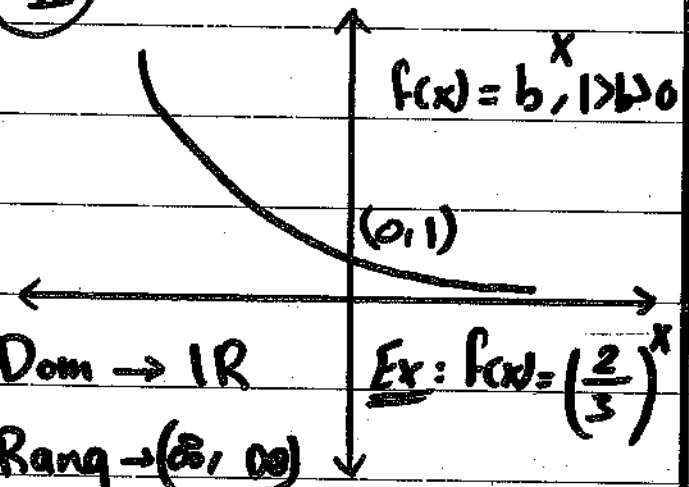


Dom ⇒ IR

Range ⇒ $(0, \infty)$

Ex: $f(x) = 3^x$

(II)



$f(x) = b^x$, $1 > b > 0$

Dom → IR

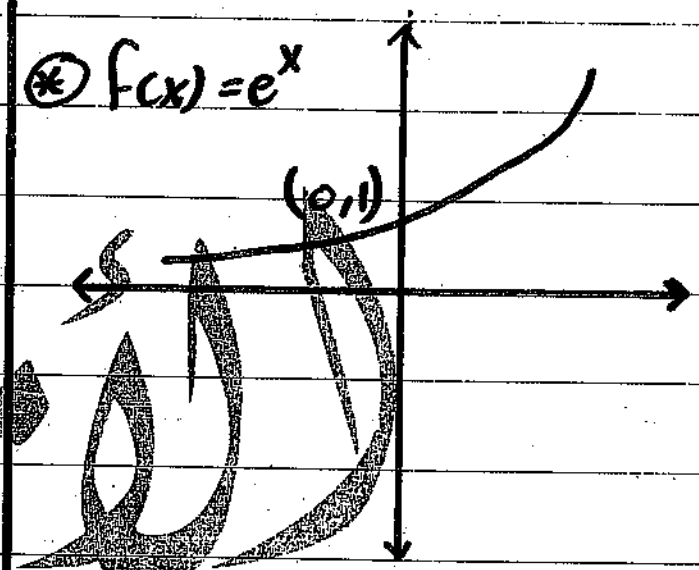
Rang → $(0, \infty)$

Ex: $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

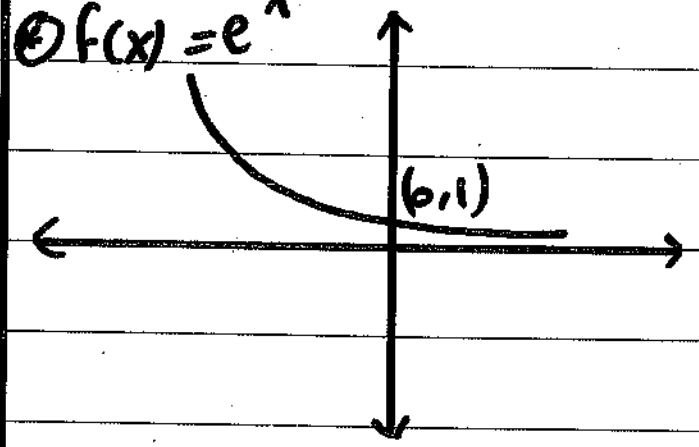
* عندما يسمى الأساس بالأساس الطبيعي

* The natural exponential function.

* $f(x) = e^x$



* $f(x) = e^{-x}$



مكتبة خواطر

* في حالة إدراج Dom الاقتران الأسي: نخرج كل الأس.

$\Rightarrow Dom(b)^{g(x)} \Rightarrow Dom(g(x))$

$\Rightarrow Dom(e)^{g(x)} \Rightarrow Dom(g(x))$

Ex: Solve !!!!!!

① $(27)^x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow (3)^{3x} = (3)^{-1}$

$\Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$ *

* Find Dom of f(x) ?

① $f(x) = e^{\sqrt[3]{x-1}}$

$\Rightarrow Dom \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow IR$

② $f(x) = (3)^{\sqrt{4-x^2}}$

$\Rightarrow Dom \sqrt{4-x^2} = [-2, 2]$

③ $f(x) = e^{\left(\frac{x}{x^2-9}\right)}$

$\Rightarrow Dom \frac{x \sim R}{x^2-9 \sim R}$

$\Rightarrow R \cap R - \{x^2-9=0\}$

$\Rightarrow R - \{\pm 3\}$

④ $f(x) = (x-1)^{\sqrt{9-x^2}}$

$\Rightarrow Dom \sqrt{9-x^2} \rightarrow [-3, 3]$

* يوجد شرط للاقتران الأسي $[b>0, b\neq 1]$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$\Rightarrow (1, \infty) - \{2\}$

$\Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow [-3, 3] \cap (+1, \infty) - \{2\}$

$\Rightarrow (1, 3] - \{2\}$

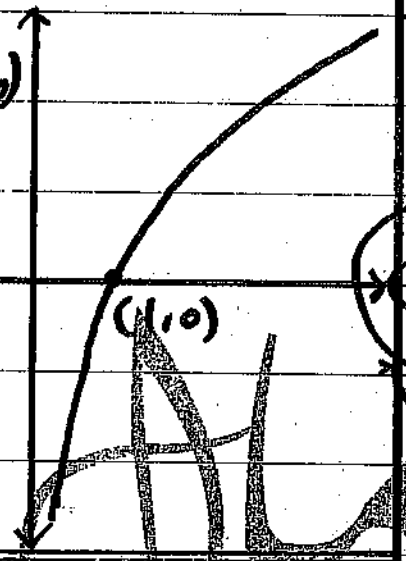
Logarithmic - function.

$\Rightarrow f(x) = \log_b^x \quad \{b \neq 1, b > 0\}$

إنتبه

$\text{Dom } f(x) = (0, \infty)$

$\text{Range } f(x) = \mathbb{R}$

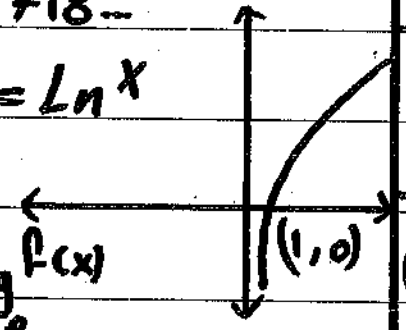


The natural logarithmic

اللوغاريتم الطبيعي

$b = e = 2.718\ldots$

$\Rightarrow f = \log_e^x = \ln x$



$\Rightarrow \ln f(x) = \log_e^{f(x)}$

"natural log" "لوغاريتم طبيعي"

$\Rightarrow \log_{10}^{f(x)} = \log f(x)$

"Common Log" "لوغاريتم اعتيادي"

properties of Logarithmic

① $\log_b^{(xy)} = \log_b^x + \log_b^y$

② $\log_b^{(x/y)} = \log_b^x - \log_b^y$

* لوغاريتم المقلوبين = مجموع اللوغاريتمين

* لوغاريتم المقسوم = طرح اللوغاريتمين

③ $\log_b^{x^n} = n \log_b^x$

قاعدة: " = "

* لوغس = نلوغس "

④ $\log_y^x = \frac{\ln x}{\ln y}$

⑤ $\log_b^{b^{(x)}} = x \quad \& \quad \ln e^x = x$

⑥ $\log_b^1 = 0 \quad \& \quad \log_5^1 = 0$

$\ln 1 = 0$

مكتبة خواطر

⑦ $\ln e = 1$

$\Rightarrow \log_b^b = 1$

⑧ $\log_b \frac{1}{c} = \log_b (c)^{-1} = -\log_b^c$

"لوغس" - "لوغس"

⑨ $(b)^{\log_b^x} = x \; ; \; e^{\ln x} = x$

Ex: find the value of :-

① $\log_2 \frac{1}{32}$

$\Rightarrow \log_2^{32^{-1}} \Rightarrow \log_2 (2)^{5^{-1}}$

$\Rightarrow \log_2^{2^{-5}} = -5 \log_2^2 = -5$

② $\log_4^4$

$\Rightarrow 1$

✳ ملاحظة :-

الإقتران اللوغريتمي عبارة عن إقتران عكسي للإقتران الأسي

$\Rightarrow f(x) = e^x$, find the $f^{-1}(x)$

$\Rightarrow e^x = y \Rightarrow \ln y = \ln e^x$

$\Rightarrow \ln y = x$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$

Ex: $2^5 = 32$ بالشكل الـ log للأسي

$\Rightarrow \log_2 2^5 = \log_2^{32}$

$\Rightarrow 5 = \log_2^{32}$

Ex: Find the Dom of f(x)?

① $\log (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$

② $\ln (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$

Ex: find the Dom of f(x)?

① $f(x) = Log^{(x^2-4)}$

$\Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4}$

$|x| > 2 \Rightarrow x > 2, x < -2$

$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

② $f(x) = Ln^{(\sqrt[3]{x-4})}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x-4} > 0$

$\Rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

$(4, \infty)$

③ $f(x) = \frac{1 \to R}{Ln(3-x) - Ln 2}$

$3-x > 0$ ← (حقيقي) R

$\Rightarrow 3 - x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow (-\infty, 3)$

$- \{Ln(3-x) - Ln 2 = 0\}$

$\Rightarrow Ln_e(3-x) = Ln_e 2$

$\Rightarrow 3 - x = 2, \boxed{x = 1}$

$\therefore R \cap (-\infty, 3) - \{1\}$

$\Rightarrow (-\infty, 3) - \{1\}$

④ $f(x) = Log_{(x)}^{\sqrt{9-x^2}}$

$x > 0$

$\Rightarrow (0, \infty), x \neq 1$ * إنتبه *

$\Rightarrow \sqrt{9-x^2} > 0 \Rightarrow 9 - x^2 > 0$

$\sqrt{9} > |x| \Rightarrow 3 > x > -3$

$\Rightarrow x \in (-3, 3)$

$\Rightarrow (-3, 3) \cap (0, \infty) - \{1\}$

$\Rightarrow (0, 3) - \{1\}$

* ملاحظة: عند إيجاد قيم x

يجب تعويضهم بالمعادلة جوفاً
فإذا كان حاصل اللوغريتم
أصغر أو يساوي صفر

Ex: Find the value of (x)?

① $\log_{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow$

$\log_{10} \sqrt{x} = (10)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 100 \Rightarrow x = (10)^4$

② $5^x = 7$

$\Rightarrow \log_5 5^x = \log_5 7$

$\Rightarrow x = \log_5 7$

③ $\log_x 4 = 2$

$\Rightarrow \frac{\ln 4}{\ln x} = 2$

$\Rightarrow 2\ln x = \ln 4$

$\ln x^2 = \ln 4$

$\Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = +2 \in$

$x = -2 \notin$

$\therefore x > 0, x \neq 1$

④ $5^{2x} = 625$

$\Rightarrow 5^{-2x} = 5^4, \Rightarrow -2x = 4$

$\boxed{x = -2}$

⑤ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln 2x^2 = \ln 3$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{2x^2}{x}\right) = \ln 3$

$\Rightarrow \ln 2x = \ln 3 \Rightarrow 2x = 3$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow \boxed{+\sqrt{\frac{3}{2}} \in}$

$-\sqrt{\frac{3}{2}} \notin$

⑥ $\log(x-2)+\log(2x-3)=2\log x$

$\Rightarrow \log(x-2)(2x-3)=\log x^2$

$\Rightarrow 2x^2-4x-3x+6=x^2$

$\Rightarrow x^2-7x+6=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-6)=0$

$\boxed{x=1}$, $\boxed{x=6}$

$x=6\in$, $x=1\notin$

$\because x>0$, $x\neq 1$

⑦ $x^3\ln x-9x\ln x=0$

$\Rightarrow x\ln x(x^2-9)=0$

$x=0$ ← ↓ → $x^2-9=0$

$\boxed{x=\pm 3}$

$\ln x=0$

$\Rightarrow \ln_e x=e^0 \Rightarrow \boxed{x=1}\in$

$x=3\in$, $x=-3\notin$

$\therefore x=\{1,3\}$

⑧ $e^{2x}-6e^x=7$

$\Rightarrow (e^x)^2-6(e^x)-7=0$

Let $y=e^x$

$\Rightarrow y^2-6y-7=0$

$(y+1)(y-7)=0$

$y=-1$, $y=7$

$e^x\neq -1$, $e^x=7$

$\Rightarrow \ln e^x=\ln 7$

$\Rightarrow \boxed{x=\ln 7}$ #

⑨ If $f(x)=e-(3)^x$, find $f(\frac{1}{\ln 3})$?

$\Rightarrow \frac{1}{\ln 3} \Rightarrow \frac{\ln e}{\ln 3} \Rightarrow \log_3 e$

$f(\frac{1}{\ln 3})=e-(3)^{\log_3 e}$

$\Rightarrow e-e=0$

الآمال

إعداد : أيمن زيود

سؤال فاتحة مش سهلة

Q $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$ the Domain is ?

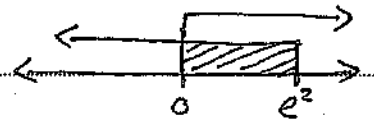
$\frac{1}{\sqrt{2-\ln x}} \longrightarrow R$

$\sqrt{2-\ln x} \rightsquigarrow 2-\ln x > 0$

$2 > \ln x$

$x < e^2$

$\ln x \longrightarrow x > 0$



هيدا بنعمل تقاطع

Domain $f(x)$ $(0, e^2)$ ← بعد التقاطع

سؤال فيه سن

Q $f(x) = \ln(x-1) + 1$ ، $f^{-1}(x) = ?$

مصيري بالـ f^{-1} حالتان:

1) اعط مكان $y = f(x)$ 2) أخلي x لحالها 3) اعط مكان $f^{-1}(x) \Leftrightarrow x$

$x \Leftarrow y$

$y = \ln(x-1) + 1$

$e^y = e^{\ln(x-1)+1}$

$e^y = e^{\ln(x-1)} * e^1$

$e^y = (x-1)\, e^1$

$\frac{e^y}{e^1} = (x-1)$

$e^{(y-1)} + 1 = x$

$f^{-1}(x) = e^{(x-1)} + 1$

؟ $a^{a+b} = e^a * e^b$

؟ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

؟ $e^{\ln x} = x$

صفحة: [ ]

خط : عبدالله دياك

مكتبة خواطر

الآمال

إعداد : أيمن زيود

فيرست سرسك

Q $e^{2x} = 7$ the solution of the equation is?

نريد انو بحكيلك قلي x طالعا

$e^{2x} = 7$

باخذ ln للطرفين عم شان اطلع من e

$\ln e^{2x} = \ln 7$

$2x = \ln 7$

$x = \frac{\ln 7}{2} = \ln(7)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{7}$

؟ $\ln e^x = x$

؟ $e^{\ln x} = x$

؟ $a \ln b = \ln b^a$

؟ $2^{-1} = \frac{1}{2}$

؟ $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

فيرست سرسك

Q The solution of the equation $\log_7 x + \log_7 (x-6) = 1$

$\log_7 x + \log_7 (x-6) = 1$

$\log_7 x(x-6) = 1$ (برفعهم للاس 7)

$7^{(\log_7 (x^2-6x))} = 7^1$

$x^2 - 6x = 7 \rightsquigarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x-7)(x+1) = 0$ ←

$x = 7$ ، $x = -1$ ← مرفوضة لانو داخل log سالب

؟ $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

؟ $b^{(\log_b x)} = x$

؟ $\log_b b^x = x$

؟ الجواب هو $x = 7$ فقط

مكتبة خواطر

Ex: $\ln(x)^{\ln x} + 2\ln\frac{1}{x^3} + 9 = 0$

$\ln(x)\ln(x) + 2\ln x^{-3} + 9 = 0$

$\Rightarrow (\ln(x))^2 - 6\ln(x) + 9 = 0$

$(\ln x - 3)(\ln x - 3) = 0$

$\ln x = 3 \Rightarrow \boxed{x = e^3}$

Ex: $\log_3^x - \log_9^x = 1$

$\frac{\ln x}{\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 9} = 1$

$\Rightarrow \frac{2\ln x}{2\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 9} = 1$

$\Rightarrow \frac{2\ln x}{\ln 9} - \frac{\ln x}{\ln 9} = 1$

$\Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 9} = 1 \Rightarrow \ln x = \ln 9$

$\Rightarrow \boxed{x = 9}$

Ex: $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$

$\Rightarrow e^x + e^{-x} = 1$

$e^x + \frac{1}{e^x} = 2 \Rightarrow \frac{(e^x)^2 + 1}{e^x} = 2$

$\Rightarrow (e^x)^2 + 1 = 2e^x$

$\Rightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 1) = 0$

$e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln 1$

$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln 1$

$\boxed{x = 0}$

Ex: $x\ln(x^2 - 15) + 2\ln(x^2 - 15) = 0$

$\Rightarrow (\ln(x^2 - 15))(x + 2) = 0$

$\Rightarrow \ln(x^2 - 15) = e^0$

$\Rightarrow x^2 - 15 = 1 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

$\therefore x = \{-4, 4\}$

Limits

⊛ النهايات.

① النهاية موجودة: أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

من اليمين ← $x \to a^+$ ← أي أن $x > a$

من اليسار ← $x \to a^-$ ← أي أن $x < a$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \text{Constant}$ ثابت (عدد)

بشكل عام

② النهاية غير موجودة (D.n.e)

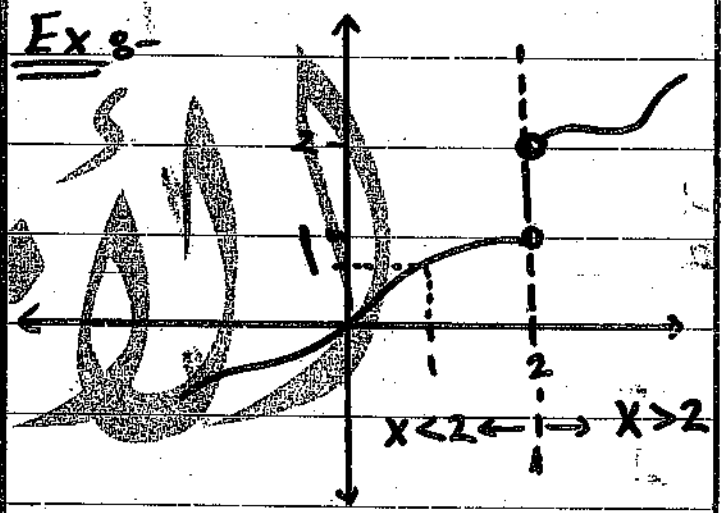
⇐ أن تكون النهاية من اليمين ≠ تساوي النهاية من اليسار

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \text{D.n.e}$

Does not exist «غير موجودة»

النهاية بشكل عام غير موجودة

Ex:-



$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \quad / \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = \text{d.n.e.}$

مكتبة خواطر

properties of limits

* خصائص النهايات

* أي أن النهاية توزع على القسمة ولكن بشرط أن لا يساوي المقام صفر.

③ $\lim_{x\to a} (f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$

⑨ $\lim_{x\to a} C = C$; C: constant

ثابت

* نهاية الثابت = الثابت نفسه

Ex: If $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} g(x) = -4$ و Find:-

$\lim_{x\to 1} \left(g(x) - \frac{1}{1-f(x)}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x) - \frac{1}{1-\lim_{x\to 1} f(x)}$

$\Rightarrow -4 - \frac{1}{1-2} \Rightarrow -4-(-1) = \boxed{-3}$

If $\lim_{x\to a} f(x) = M_1$ ∈

$\lim_{x\to a} g(x) = M_2$ ⇒ النهاية موجودة

Then:-

① $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x))$

$= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

* النهاية توزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة.

② $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ بشرط

* حالة ② $\frac{0}{0}$

⇐ هنا يجب إلاختصار

⇐ دائماً نختصر $(x-a)$

⇐ يكون اكل إما بـ :-

① ← القليل.

② ← المكسور

③ ← الضرب بالمرافق.

④ ← القسمة.

⇐ أمثلة على القليل

Ex:-

① $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{2+x} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)} \Rightarrow \lim_{x\to -2} x = \boxed{-2}$

② $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)}$

$= \lim \sqrt{x}+2 \Rightarrow \sqrt{4}+2 \Rightarrow 2+2 = \boxed{4}$

* طريقة إيجاد النهاية :-

⇐ نعوض تعويض مباشر بالإقتران

ثم نتبع حل الحالات التالية حسب

ناتج التعويض :-

⇐ حالات ناتج التعويض :-

①	رقم
②	$\frac{0}{0}$
③	$\sqrt{0}$
④	إقتران متشعب
⑤	$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

* حالة ① (رقم)

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} 2x+1 = 2(3)+1 = \boxed{7}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} 2x^2+4x-3 = 2(1)^2+4(1)-3$

$= \boxed{3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \sqrt{3x+3} = \sqrt{3(2)+3}$

$\Rightarrow \sqrt{9} = \boxed{3}$

أمثلة على الكسور

« توحيد المقامات »

Ex: ① $\lim_{x\to 0} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ← توحيد مقامات

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x(x+1) = 0$

② $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{5}{5}-\frac{5}{x+1}}{x-2}$

$\Rightarrow \frac{5(x+1)-5}{5(x+1)}$

$x-2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{(x-3)(3(x+1))}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{5(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{5}{3(x+1)} \Rightarrow \frac{5}{9}$

③ $\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)}{(x-2)} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} x^2+2x+4$

$\Rightarrow 4+4+4 = 12$

④ $\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to -4} \frac{2}{x-3} \Rightarrow \frac{2}{-7}$

توحيد مقامات.

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm CB}{B*D}$$

مكتبة خواطر

③ $\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{(x^2-9) - 6(x-3)}{(x-3)(x^2-9)}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x+3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6}}$

* أمثلة على المرافق.

* طريقة أم "بالوال"

$\Rightarrow \sqrt{x} - a \Rightarrow * \frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}+a}$

$\Rightarrow \frac{x-a^2}{\sqrt{x}+a}$

$\Rightarrow \sqrt{x} + a \Rightarrow * \frac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}-a}$

$\Rightarrow \frac{x-a^2}{\sqrt{x}-a}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} \ominus a \Rightarrow$

$* \frac{(\sqrt[3]{x})^2 \oplus a\sqrt[3]{x} \oplus a^2}{(\sqrt[3]{x})^2 \oplus a\sqrt[3]{x} \oplus a^2}$

$= \frac{x \ominus a^3}{(\sqrt[3]{x})^2 \oplus a\sqrt[3]{x} \oplus a^2}$

← أمثلة - المرافق.

Ex: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} * \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{1+8}+3)} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6}}$

② $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} * \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 \Rightarrow \boxed{2}$

Ex: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} * \frac{\sqrt[4]{x+15}+2}{\sqrt[4]{x+15}+2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[2]{x+15}-4}{(x-1)(\sqrt[4]{x+15}+2)}$ * حرافق

$\Rightarrow \left[* \frac{\sqrt[2]{x+15}+4}{\sqrt[2]{x+15}+4} \right]$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x+15-16}{(x-1)(\sqrt[4]{x+15}+2)(\sqrt[2]{x+15}+4)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt[4]{16}+2)(\sqrt[2]{16}+4)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{(4)(8)} = \boxed{\frac{1}{32}}$

Ex: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{2x+3}-3} * \frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2x+3-9}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2(x-3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(\sqrt{2x+3}+3)}{2}$

$= \frac{6*6}{2} = \boxed{18}$

مكتبة خواطر

حالة ⑨

$\sqrt{0}$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-3} = \sqrt{0}$

$\lim_{x\to a^+} = \sqrt{\oplus} = 0$

$\lim_{x\to a^+} = \sqrt{\ominus} = d.n.e$

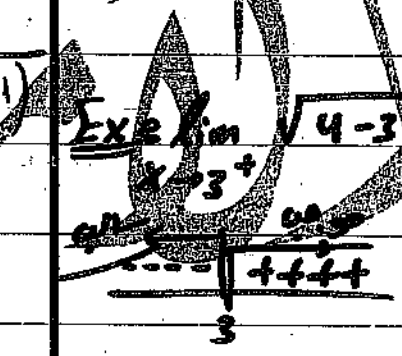
$\lim_{x\to a^-} = \sqrt{\oplus} = 0$

$\lim_{x\to a^-} = \sqrt{\ominus} = d.n.e$

* الحرفة إذا كان جذر أو سالب تحته نأخذ رقم أكبر من a وأصغر من a بمقدار واحد / حالة الآحاد

Ex: $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{\oplus} = 0$



$\lim_{x\to 3^-} \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} = d.n.e$

$\Rightarrow \sqrt{\ominus} = d.n.e.$

Then:-

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-3} = d.n.e$

Ex:- $\dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x^3 - 8}$

حالة ⑥ صفر على صفر.

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x^3-8} * \dfrac{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x-1}\right) + 1}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x-1}\right) + 1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{x-1-(1)}{(x^3-8)\left(\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1} + 1\right)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)\left(\sqrt[3]{x-1}^2 + \sqrt[3]{x-1} + 1\right)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(12)(3)} = \dfrac{1}{36}$

#Remember.

① $(x^2-a) = (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$

② $(x^3-a^3) = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

③ $(x^3+a^3) = (x+a)(x^2-ax+a^2)$

④ $\dfrac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x - 1$

* الإقتران المتشعب

* ملاحظة: $x \to a^+$ ← $x > a$ ، $x \to a^-$ ← $x < a$

ملاك ناجح التوفيق في الإقتران المتشعب

" نقطة تشعب "

عندها: - يوجد اختلاف من اليمين أو اليسار

" نقطة داخل الفترة "

عندها: - تعويض مباشر

Ex: $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \geq 3 \\ x^2-4 & ; x < 3 \end{cases}$

Then: - find $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

⊛ إذا كان ناتج الحد خارج الجذر التربيعي يساوي الصفر، كالآتي:

لـ

$\sqrt{\oplus}$ $\sqrt{\oplus}$ ⇒ [0]

عدد

$\sqrt{\oplus}$ $\sqrt{\ominus}$ ⇒ d.n.e

عدد

$\sqrt{\ominus}$ $\sqrt{\oplus}$ ⇒ d.n.e

عدد

Ex: $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{10-2x}$

سالب ← | → موجب

$+ + + + | - - -$

5

⇒ $\sqrt{\text{سالب}}$ ⇒ d.n.e

Ex: $\lim_{x\to 4^+} \sqrt{2x-8}$

7

إلتباه

لـ طالب من اليمين فقط

$- - - - - + + + +$

4

موجب

⇒ $\lim_{x\to 4^+} \sqrt{\text{موجب}} = [0]$

⇒ $\lim_{x\to 1}(x^2-4) = -3$

⇒ $\lim_{x\to 4}(x+2) = 6$

⇒ $\lim_{x\to 3^+}(x+2) = 5$, $\lim_{x\to 3^-}(x^2-4) = 5$

∴ $\lim_{x\to 3} = 5$ #

Ex: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & ; x>5 \\ 2x+3 & ; x<5 \end{cases}$

Then: find $\lim_{x\to 5} f(x)$

⇒ $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

⇒ $\lim_{x\to 5^-} 2x+3 = 13$

∴ $\lim_{x\to 5}$ = d.n.e.

* إذا كان إيجاد النهاية موجودة عند نقطة تشعب

⇒ $\lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-}$; Then

find the constant "b", if $\lim_{x\to 3} f(x)$ exist

Ex: $f(x) = \begin{cases} 2x+b & , x\le 3 \\ 4x+5 & , x>3 \end{cases}$

find "b" If $\lim_{x\to 3} f(x)$ exist

⇒ (#1)

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$

⇒ $\lim_{x\to 3^+} 4x+5 = \lim_{x\to 3^-} 2x+b$

⇒ $12+5 = 6+b$ ⇒ $\boxed{b=11}$

المثال (5)

عند ما س تقترب من ٠

* تعني هي بيقة ٠ كتير إما أخذ عدد أكبر كعدد أصغر لأخذ الأعداد

الطريقة - الأسهل

* عدد أكبر كعدد أصغر

← جهة (+) كجهة (-) ← d.n.e

← جهة (+) كجهة (+) ← $+\infty$

← جهة (-) كجهة (-) ← $-\infty$

Ex:- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = d.n.e.$ #

Ex:- $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2 \\ 2x+k, & x > 2 \end{cases}$

Find:- k such that $\lim_{x\to 2} f(x)$ exist ?

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\Rightarrow 4+k = 4k \Rightarrow \boxed{k = \frac{4}{3}}$

- $\lim_{x\to a}$ تعني أنك تقترب من a

أي أن x تقترب من a ولكن لا تساوي a

Ex:- $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \neq -2 \\ 25, & x = -2 \end{cases}$

Find $f(-2)$ & $\lim_{x\to -2} f(x)$

$\Rightarrow f(-2) = \boxed{25}$ #

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} x^2+1 = 4+1 = \boxed{5}$ #

* ملاحظة :-

$\frac{|0|}{0}$ ⇐ بنحيد تعريف المطلق

Ex:- find the $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \frac{|0|}{0}$

$|x| = 0$

$-x$ | x

−−− | +++

0

$|x| = \begin{cases} x, x>0 \\ -x, x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

$\Rightarrow$ Ex:- find the $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{|3-x|}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{|3-x|} = \frac{0}{|0|}$

$\Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3$

$f(x) = \begin{cases} 3-x, x\leq 3 \\ x-3, x\geq 3 \end{cases}$ ⇐

$3-x$ | $x-3$

+++ | −−−

3

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} (x+3) = \boxed{6}$

Ex:- find $\lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x^2-9}$?

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{x+4}{x^2-9} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{x+4}{x^2-9} = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x^2-9} =$ d.n.e.

*Limits of trigonometric function.

Ex:- ① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

② $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x + \tan 2x}{\sin 5x + 7x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\sin x + \tan 2x}{x}}{\frac{\sin 5x + 7x}{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 2}{5 + 7}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos 0 + 2}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{4x^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan 2x}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 1$

① $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (2\sin x - \tan \frac{x}{2})$

$\Rightarrow 2(1) - (1) = 1$

② $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos(x) + 1} = \frac{0}{2} = 0$

* **Theorem:-**

$x \to 0$ القاعدة

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx}$

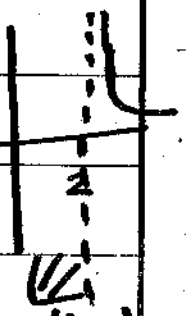
$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx}$

* **ملاحظة:-** ممكن نختاج أحيان تقسم على x^2 أو x

#Vertical-asymptote.

* التقارب العامودي.

⇒ If $\lim_{x \to a}$ { $+\infty$, $-\infty$, d.n.e



⇒ $x = 2$ vertical asymptote

* طريقة الحل: "لأنه بقال سؤال الي"

① إيجاد المقام يساوي الصفر

② نجد قيم "x"

③ نساوي داخل الـ "ln" بالصفر

نجد قيم "x"

④ نجد النهاية لقيم "x" ويجب أن يكون الناتج ($+\infty$, $-\infty$, d.ne)

بكون $x = a$ vertical. asy.

---

④ If $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3bx} = 3$

Then: find the constant b?

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{3bx} = 3$

$\frac{2}{3b} = 3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{9}}$ ✱

⑤ $\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = \frac{1}{x}$ ← داخل (sin)

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{y}}$

$x \to \infty$

$y \to 0$

$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \sin y$

$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \boxed{1}$

Ex:- $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$

Find:- $\frac{2}{x^2-4}$ the vertical asymptoty ?

$\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to+2} \frac{2}{x^2-4} = d.n.e$

$\Rightarrow \lim_{x\to-2} \frac{2}{x^2-4} = d.n.e$

Then:- $x=\{\pm 2\}$ vertical asymptote

$\Rightarrow f(x)=Ln(x+1)$

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$\Rightarrow Ln\,0 = d.n.e$

$Ln\,1=0$

$e^{\infty}=\infty$

$e^{-\infty}=0$

$\lim_{x\to-1} Ln(x+1) \Rightarrow Ln\,0 = \boxed{d.n.e}$

$f(x)=\frac{x-2}{|x|-2}$

$\Rightarrow |x|-2=0 \Rightarrow |x|=2$

$x=\pm 2$

$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x\to2} \frac{x-2}{|x|-2} \Rightarrow \lim_{x\to2} \frac{x-2}{x-2} = 1$

$\Rightarrow$ So at $\boxed{x=2}$ vertical

$\Rightarrow \lim_{x\to-2} \frac{x-2}{-x-2} = \frac{-4}{0} = d.ne$

Then:- $\boxed{x=-2}$ vertical

Ex:- If $f(x)=\tan(x)$, Then find the vertical asymptote on $x\in[0,2\pi]$?

Ex: If:-

$\Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{ax^2-b}$, has vertical at $x=-1$, Then find the value(s) of "a,b"

$\Rightarrow ax^2-b \Rightarrow a(-1)^2-b = \infty$

$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$

$\Rightarrow a,b \in R \therefore \boxed{a=b}$

* ← ميك الجواب بدفع داخل.

Ex: $f(x) = \frac{x-1}{ax^2-1}$, has a vertical at $x=1$, Then find a ?

$\Rightarrow ax^2-1 \Rightarrow a(1)-1 = \infty$

$= \boxed{a=1}$

(#1)

← نساوي المقام بالصفر:-

$\Rightarrow \cos(x) = \infty \Rightarrow x = \{\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \frac{1}{0} = \infty$ d.n.e

$\Rightarrow \lim_{x \to 3\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-1}{0} = \infty$ dne

$\Rightarrow X = \{\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\}$ vertical asymptote

← إذا ذكر $\boxed{x=a}$ عنها vertical

إذا كان الاقتران بـ a في مقامه بنوفي a بالمقام ونساوي بالصفر ونجد قيم a إذا "سأل" بنساوي ما داخله

The - Sequeeze - theorem

نظرية الشطيرة *

⇒ If $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

when x is near to a &

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$

Then $\lim_{x \to a} f(x) = L$

طريقة الحل # كيف الطريقة

① اكتب المتباينة المطلوب السؤال عنها (sin x ، cos x) بمعرفة Range

② اربط طرفي المتباينة حتى يشبه السؤال

③ خذ lim لجميع الأطراف.

④ الـ lim الأوسط « المطلوب » يساوي الطرفين

By sequeeze theorem.

Exa- If $x^2 - 9 \leq f(x) \leq x^3 + 3$

Then:- find $\lim_{x \to -2} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to -2} x^2 - 9 \leq \lim_{x \to -2} f(x) \leq$

$\lim_{x \to -2} x^3 + 3$

$\Rightarrow -5 \leq \lim_{x \to -2} f(x) \leq -5$

Then: $\lim_{x \to -2} f(x) = -5$

by the sequeeze theorem

Exa- find $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x} \leq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} \leq$

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$

$0 \leq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} \leq 0$

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} = 0$

(ب ث) Limits at infinite
* النهاية في اللانهاية

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \ln x = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \geq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} \geq 0$

Then: $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x} = 0$

by sequeeze.

Ex: find $\lim_{x \to 0} x^2 e^{\sin\frac{\pi}{x}}$

$\Rightarrow 1 \geq \sin\frac{\pi}{x} \geq -1$

$e^1 \geq e^{\sin\frac{\pi}{x}} \geq e^{-1}$

$* x^2$ $* x^2$ $* e$

$x^2 e \geq x^2 e^{\sin\frac{\pi}{x}} \geq x^2 e^{-1}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 e \geq \lim_{x \to 0} x^2 e^{\sin\frac{\pi}{x}} \geq$

$\lim_{x \to 0} x^2 e^{-1}$

$\Rightarrow 0 \geq \lim x^2 e^{\sin\frac{\pi}{x}} \geq 0$

Then: $\lim_{x \to 0} x^2 e^{\sin\frac{\pi}{x}} = 0$

By sequeeze

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+x^2\sin\frac{1}{x}\right)$$

$\sin\infty$

Sequeeze Thm

$$1 \geq \sin\frac{1}{x} \geq -1$$

$$x^2 \geq x^2\sin\frac{1}{x} \geq -x^2$$

$$1+\cos x+x^2 \geq 1+\cos x+x^2\sin\frac{1}{x} \geq 1+\cos x-x^2$$

$$2 \geq \lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+x^2\sin\frac{1}{x}\right) \geq 2$$

Thm $= \boxed{2}$

⇒ Remark :-

→ $3*(\infty) = \infty$

→ $-7*(\infty) = -\infty$

→ $-8*(-\infty) = \infty$

→ $9*(-\infty) = -\infty$

→ $\frac{\pm\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty$

→ $\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$ ∴ $(0)^{\infty} = 0$

→ $(\infty)^{\infty} = \infty \rightarrow e^{\infty} = \infty$

→ $e^{-\infty} = 0 \rightarrow \ln 0^{+} = -\infty$

→ $\ln \infty = \infty \rightarrow \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

→ $\tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$

→ $(-\infty)^{7} = -\infty \rightarrow (-\infty)^{8} = \infty$

→ $(\infty)^{5} = \infty \rightarrow (\infty)^{6} = \infty$

properties of limit goes to infinite.

خصائص النهاية في اللانهاية.

① $\lim_{x\to\pm\infty} c = c$

② $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x))^{n} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right)^{n}$

③ $\lim_{x\to+\infty} x^{n} = +\infty \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots$

④ $\lim_{x\to-\infty} x^{n} = \begin{cases} -\infty, & n: \text{odd} \\ +\infty, & n: \text{even} \end{cases}$

⑤ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{n}} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\right)^{n} = 0$

القاعدة العامة

⑥ $\lim_{x\to\pm\infty} (c_n x^{n} + \ldots + c_1 x + c_0) = \lim_{x\to\pm\infty} c_n x^{n}$

* تنبيه: كثيرة حدود نفس القاعدة لـ $(-\infty, +\infty)$

⑦ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^{m} + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^{n} + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^{m}}{b_n x^{n}}$

* بإختصار :- كيس اكبر واحد تأخذ أكبر أس بالبسط على أكبر رأس بالمقام.

$$\begin{cases} 0 , & n<m \\ \frac{a_n}{b_m} , & n=m \\ \pm\infty , & n>m \end{cases}$$

Ex ① $\lim_{x\to\infty} 5x^3 - 7x^{100}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} -7x^{100} = -7(\infty)^{100} = -\infty$

② $\lim_{x\to-\infty} 2x - 4x^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} -4x^2 \Rightarrow (-4)(-\infty)^2 = -\infty$

③ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 7x^3}{4x^3 + 2x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-7x^3}{4x^3} = \frac{-7}{4}$

④ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 5x^2}{2x^2 + x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2}{2x^2} = \frac{-5}{2}$

⑤ $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^{99} + 2x^{100}}{3x^{99} + 2x^{50}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{100}}{3x^{99}} = \frac{2x}{3} = \infty$

⑥ $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^{99} + 2x^{100}}{3x^{99} + 2x^{50}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^{100}}{3x^{99}} = \frac{2x}{3} = -\infty$

$\Rightarrow$ ⑦ $\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 2x^2}{4x^3 + 5x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \frac{1}{2x} = 0$

⑧ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3 + 4x}{2x^2 + 7x^4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{7x^4} \Rightarrow \frac{2}{7x} = 0$

في حالة « e^x »

إذا كان طالب $(x \to +\infty)$ فأخذ أكبر أس بالموجب

إذا كان طالب $(x \to -\infty)$ فأخذ أكبر أس بالسالب (أصغر أس)

$\Rightarrow -7 < -2$

$\Rightarrow -7 < +8$

(إضافة)

Ex: ① $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{4x} - 5e^{-7x}}{2e^{3x} + 5e^{4x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^{4x}}{5e^{4x}} = \frac{1}{5}$

② $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-2x} + e^{-3x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-2x}}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{-3x} = 0$

③ $\lim_{x \to \infty} \frac{3e^{x} - 2e^{-x}}{e^{-x} + e^{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{3e^{x}}{e^{x}} = 3$

④ $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{5x} - 5e^{-7x}}{e^{-7x} + e^{5x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{-5e^{-7x}}{e^{-7x}} = -5$

⑤ $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x} + e^{2x}}{e^{x} - e^{-x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{-e^{-x}} \Rightarrow -e^{2x} \Rightarrow 0$

⑥ $\lim_{x \to -\infty} \frac{3e^{x} - 2e^{-x}}{e^{-x} + e^{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^{-x}}{e^{-x}} = -2$

⑦ $\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^{-x} + 3e^{x}}{3e^{4x} + 2e^{5x}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^{-x}}{3e^{4x}} = \frac{2}{3} e^{-5x} = \infty$

* في حالة الجذور

* نوخذ أكبر أس تحت الجذر ونقع الجذر.

* Remark :- $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x^4} = (|x|)^2 = x^2$

$\sqrt{x^6} = (\sqrt{x^2})^3 = (|x|)^3$

Ex: ① $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3x^4+2x}{3x+4x^4}}$

$\Rightarrow \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x}{3x+4x^4}}$

$\Rightarrow \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4}{4x^4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

② $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{7x^2-x+1}}{2x+4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{7x^2}}{2x} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{x^2}}{2x}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = 0 \Leftarrow x = 0$

$(-x)$	(x)
$-$	$+$
0	

يكن نظرية تؤول للبرهان نظرية هو نأخذ القاعدة (x) وصنع :-

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{7}*(-x)}{2x} = \boxed{\frac{-\sqrt{7}}{2}}$

③ $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{\sqrt{4x^4+x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{4x^4}} = \frac{-x^2}{\sqrt{4}*\sqrt{x^4}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$ $\because \sqrt{x^4} = x^2$

④ $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^6+4x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{\sqrt{x^6}} \Rightarrow \frac{3x^3}{(|x|)^3}$

$(|x|)^3 = 0$

$(-x^3)$	(x^3)
$-$	$+$
0	

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3} = \boxed{3}$

① إذا طلب $(x \to \infty)$ .....

$\sqrt{x^2+2x} \to -x$ أكبر

$\sqrt{x^2+4} \to -x$ أصغر

$\sqrt{x^6+x^3} \to -x^3$ أصغر

② إذا طلب $(x \to -\infty)$ .....

$\sqrt{x^2+2x} \to +x$

Ex: ① $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} - x}{1} * \frac{\sqrt{x^2+2x} + x}{\sqrt{x^2+2x} + x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x) - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x}$

خاصة أكبر درجة بالبسط على أكبر درجة بالمقام

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2} + x}$ $(x) \to$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+x} \Rightarrow \frac{2x}{2x} = 1$

⑤ $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+1}}{x-x^2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6}}{-x^2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$

إنتبه

$\sqrt[3]{x^6} = x^3$

لأن الجذر فردي، تكعيبي

* حالة الضرب بالمرافق.

عندك شكلين إحفظهم ...

إذا طلب تفهمهم :-

- نضرب بالمرافق لأن ناتج التعويض $\infty - \infty$ »

صفحة : { 79 }

خط : عبد الله دياك

مكتبة خواطر

خصائص الـ Ln

☒ $\log_b^a = \frac{\ln a}{\ln b}$

☒ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

☒ $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$

☒ $a = \ln e^{(a)}$

Ex:-① $\lim_{x\to\infty} \log_3^{4x}$

$\Rightarrow \frac{\ln 4x}{\ln 3x} \Rightarrow \frac{\ln 4 + \ln x}{\ln 3 + \ln x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$ هنا أخذنا أكبر قوة بالبسط (Lnx) و

أكبر قوة بالمقام (Lnx).

Ex:-② $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} + x$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{1} * \frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}-x}$ ← أخذنا أكبر قوة بالبسط على أكبر قوة بالمقام

$\sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow$ (-x) ---- (+x) ++++

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x-x} \Rightarrow \frac{2x}{-2x} = -1$

Ex:-③ $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4} - x$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}-x}{1} * \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+4)-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2x} \Rightarrow \frac{2}{x}$

$\Rightarrow \lim \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty}$ #

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{4}+\ln x}{\ln\frac{1}{2}+\ln x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x} \Rightarrow 1$ #

Ex:- ⑤ $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-\cos(2x)}{\sin(3x)+4x}$

⇐ هنا نحل بالضغط (حد محصور)

⇐ بأخذ كل حد لحاله ونقسم على

بقسم المتباينات على

$-1 \le \cos(2x) \le 1$

$-1 \le -\cos(2x) \le 1$

$5x-1 \le 5x-\cos(2x) \le 5x+1$ ← البسط

$-1 \le \sin(3x) \le 1$ ← المقام

$4x-1 \le 4x+\sin(3x) \le 4x+1$ ← المقام

$\frac{5x-1}{4x-1} \le \frac{5x-\cos(2x)}{4x+\sin(3x)} \le \frac{5x+1}{4x+1}$ ← البسط / المقام

Ex:- ② $\lim_{x\to\infty} 2x-\ln(2+e^{2x})$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln e^{2x} - \ln(2+e^{2x})$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\right)$

$\Rightarrow \ln(1) = 0$

Ex:- ③ $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{n^3}{n^2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(n^3)}{\ln(n^2)} \Rightarrow \frac{3\ln(n)}{2\ln(n)}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Ex:- ④ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{4}x)}{\ln(\frac{1}{2}x)}$

تابع ...

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}$ ... بإدخال

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{4x-1} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{5x-\cos(x)}{\sin(x)+4x} \leq$ ↙

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{4x+1}$

$\Rightarrow \frac{5}{4} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{5x-\cos(x)}{\sin(x)+4x} \leq \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5x-\cos(x)}{\sin(x)+4x} = \frac{5}{4}$

By sequez theorem

Ex ⑥ $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln(n)}{\ln(3)}}{\frac{3\ln(n)}{\ln 2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln 2}{3\ln 3}$

$\Rightarrow \frac{2\ln 2}{3\ln 3}$

Ex ⑦ $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+4\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{1} * \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+4\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x+4\sqrt{x}) - x}{\sqrt{x+4\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{4}{2} = \boxed{2}$

كل سؤال نفسأ عنه سؤدق
القشمس ....
متى ستشرق أنت؟؟؟!!!

Ex:- ⑧ $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^6+3x^3} - x^3$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6+3x^3} - x^3 * \sqrt{x^6+3x^3} + x^3}{\sqrt{x^6+3x^3} + x^3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{(x^6+3x^3) - x^6}{\sqrt{x^6+3x^3} + x^3}$

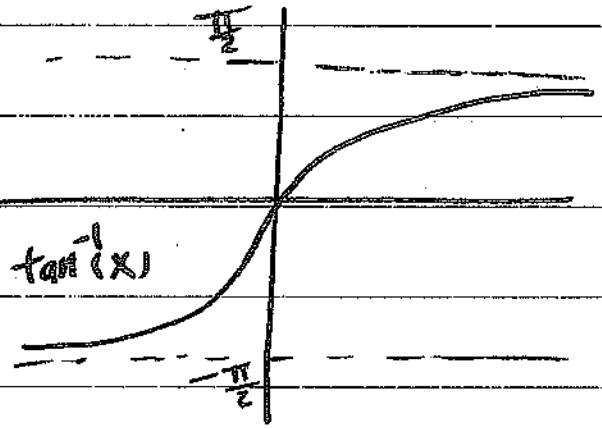
$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \boxed{\frac{3}{2}}$

وقف

Thm: If $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ &

$\lim_{x\to-\infty} = M$

Then $y_1 = L$ & $y_2 = M$ are horizontal asymptote.



Ex:- find the horizontal of f(x) ?

① $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = \boxed{1}$ ✓

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = \boxed{-1}$ ✓

Then $y = \{\pm 1\}$ horizontal asymptote.

② $f(x) = e^x$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x = \boxed{\infty}$ X

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x = \boxed{0}$ ✓

Then $y = 0$ horizontal asymptote.

③ $f(x) = \tan^{-1} x$

$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ✓

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

Then, at $y = \{\pm \frac{\pi}{2}\}$ horizontal asymptote.

Ex:- if $x=4$ & $y=8$ vertical and horizontal asymptote for $f(x) = \frac{bx+3}{2x+a}$, find (a,b)?

$x=4$ ⇐ vertical فوق لـ ⇐
إذن ناتج تعويض $(x=4)$ المقام = zero

$\Rightarrow 2(4)+a = 0 \Rightarrow \boxed{a=-8}$

& horizontal at $y=8$

$\lim_{x \to \infty} \frac{bx+3}{2x+a} \Rightarrow \frac{b}{2} = 8$

$\Rightarrow \boxed{b=16}$ & $\boxed{b=16, a=-8}$

Continuity

الإتصال

Continuous at point $x=a$ ✳

الإتصال عند نقطة

شروط

① $f(a)$ is defind الصورة موجودة

② $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$

وأن تكون النهاية موجودة

③ $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

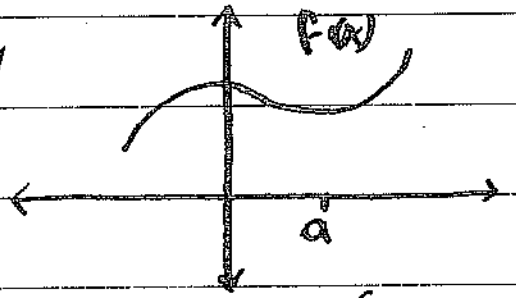
وأن تكون الصورة تساوي النهاية

⇐ أي أن :-

إذا تحقق الثلاث شروط معاً عند a

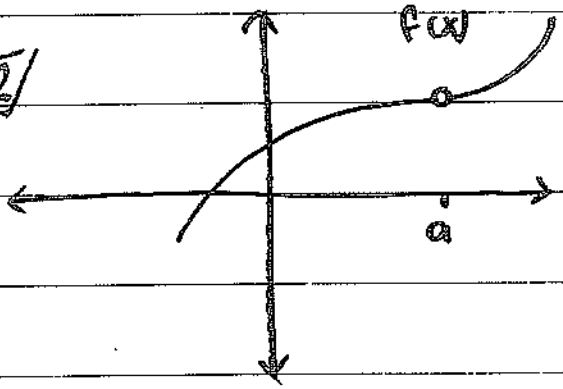
يكون الإقتران متصل عند نقطة.

⇒ 1



cont. $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

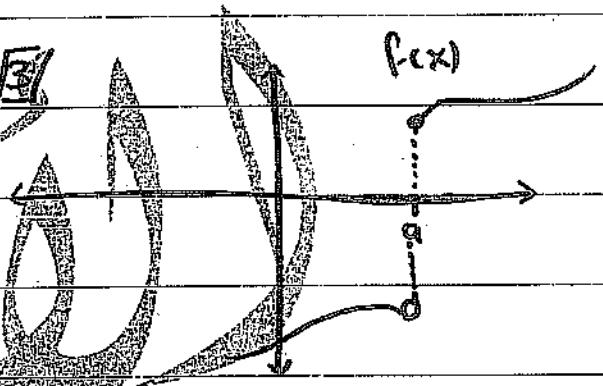
⇒ 2



⇒ not. cont. (dis cont)

⇒ f(a) not defined.

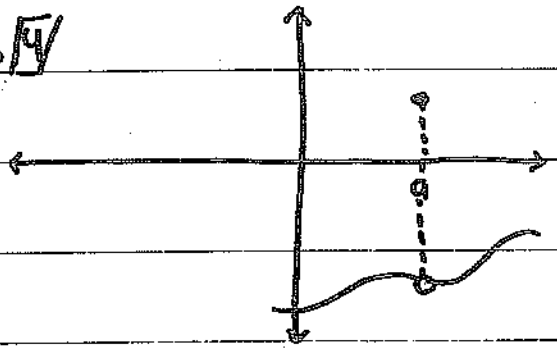
⇒ 3



⇒ not. cont. (dis cont.)

$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$

⇒ 4



$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(a) \neq f(a)$ ⇒ (dis cont)

Ex 8-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

⇒ study the continouity for $f(x)$ at $x=1$?

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2$

$\Rightarrow f(1)=2$ & Then $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

$=2$ ∴ $f(x)$ cont at $x=1$

Ex 9- $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-12}{x-4}, & x\neq 4\\ 8, & x=4\end{cases}$

⇒ study the continouity for $f(x)$ at $x=\{1,4\}$

$\Rightarrow f(1)=\frac{(1)^2-(1)-(12)}{(1)-4}=\frac{-12}{-3}$

$=4$; $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-12}{x-4}=4$

∴ Cont. at $x=1$

$\Rightarrow f(4)=8$; $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x-4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)} = 7$

∴ not cont. at $x=4$

✱ مساعدة في إيجاد قيمة المتشعب :-

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq a \leftarrow \text{النهاية } \lim_{x\to a}\\ h(x), & x=a \leftarrow \text{الصورة } f(a)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x<a \leftarrow \text{يسار } \lim_{x\to a^-}\\ h(x), & x\geq a \leftarrow \text{يمين } \lim_{x\to a^+} \text{ونهاية} = f(a)\end{cases}$$

	f(x)	cont.	dis cont.
1	$2x+1$	R	$\emptyset$
2	$\frac{1}{x-2}$	$R-\{2\}$	$x=2$
3	$\sqrt{x-1}$	$[1,\infty)$	$(-\infty,1)$
4	$\log x$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0]$
5	$\sqrt[3]{x}$	R	$\emptyset$
6	$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	$(-3,3)$	$(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$
7	$\lvert\sin x\rvert$	R	$\emptyset$
8	$\tan x$	$R-\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\ldots\}$	$x=\{\pm\frac{\pi}{2}\ldots\}$
9	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$	$[0,1)$	$(-\infty,0)\cup[1,\infty)$
10	$\frac{x-2}{x+3}$	$R-\{-3\}$	$x=-3$

(x) الإتصال على الإقترانات:-

(x) إذا كان أحدهما من الإقترانات متصل

(x) حوله بتسوى وزقاد هيك:

بطلع الـ Domain (المجال)

* ولا أي نقطة

يوناكلان بده نقاط عدم الإتصال

نعمل (dis cont) $R-\{$نقاط عدم الإتصال$\}$

Ex 8- Where f(x) is cont.

f dis cont.

مكتبة خواطر

✳ الإتصال على فترة.

Continuous on interval [a,b]

تنقسم الفترة إلى .....

① أطراف فترة:

② نقطة التشعب: $(x<c, x>c)$ ⇐ نفس الإتصال على نقطة.

$\lim_{x\to c} = f(c)$

③ الفترات: ⇐ نجد المجال:

حيث في مجال كل إقتران موجود ⇐ بمقاطعة مع الفترة إلى جنبه.

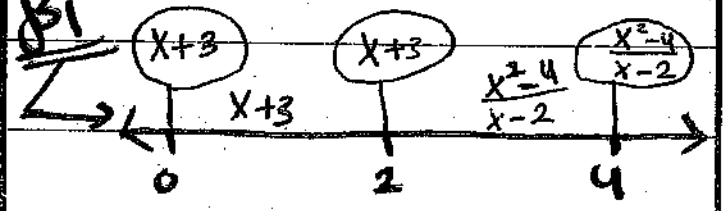
كمثيل بنكون بحثنا بالإتصال.

Ex:

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & 0\le x\le 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & 2<x\le 4 \end{cases}$$

Find f(x) cont. on [0,4] ?

✳1



✳ أطراف الفترة:

I) $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} x+3 = f(0) = 3$ ✓

∴ cont. at $x=3$

II) $x=4$

$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-4}{x-2} = f(4) = 6$ ✓

& cont. at $x=4$

✳ الفترات

III) $x\in(0,2)$

$\hookrightarrow x+3 \Rightarrow R \cap (0,2) \Rightarrow (0,2)$ ✓

∴ cont. at $x\in(0,2)$

تابع ...

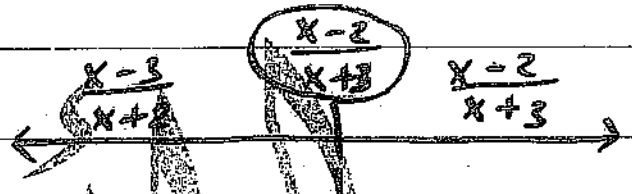
Ex:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x+3}, & x\geq 1\\ \frac{x-3}{x+2}, & x<1\end{cases}$$

Where f(x) continuous?

الحل

هنا نلاحظ أنه لدينا فرعان ← لذلك لا نبحث في الأفرع (الدوال)



* الفترات:-

1) $x\in(-\infty,1)$

$\frac{x-2}{x+3}\Rightarrow Dom\Rightarrow \mathbb{R}-\{-3\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}-\{-3\}\cap(-\infty,1)\Rightarrow(-\infty,1)-\{-3\}$

Then: f(x) not cont. at $x=-3$

2) $x\in(1,\infty)$

$\frac{x-2}{x+3}\Rightarrow Dom\Rightarrow \mathbb{R}-\{-3\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}-\{-3\}\cap(1,\infty)\Rightarrow(1,\infty)$

* لا ينتمي للفترة $(1,\infty)$ ←

4) $x\in(2,4)$

$\frac{x^2-4}{x-2}\Rightarrow Dom\Rightarrow \mathbb{R}-\{2\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}-\{2\}\cap(2,4)\Rightarrow(2,4)$ ✓

$\therefore$ cont. at $x\in(2,4)$

* تعامل بالتشعب.

5) $x=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} x+3 = 5$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

$\Rightarrow$ الشعاب غير موجود

$\therefore$ dis cont. at $x=2$

Then:- f(x) cont on $[0,4]-\{2\}$

$\Rightarrow$ Dis cont. on $[0,4]\Rightarrow$ at $x=2$

#

نطاق التشعب ⑧

③ $x=1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-1}{4}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}$

$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ∴ not cont. at $x=1$

∴ Then: $f(x)$ cont. on $R-\{-2,1\}$

Dis cont. at $x=\{-2,1\}$

Ex: Does $f(x)=\frac{1}{x}$ cont. on $[0,1]$?

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = R-\{0\}$

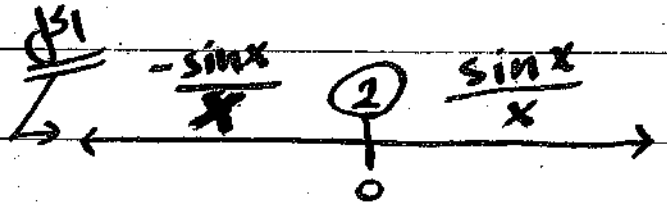
$\Rightarrow R-\{0\} \cap [0,1]$

∴ Then $f(x)$ cont. on $(0,1]$

Ex: Does $f(x)$ cont. at $x=0$?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|\sin x|}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

Sol



$|\sin x| = 0 \Rightarrow x=0$

$-\sin x$ | $\sin x$

$-\quad 0 \quad +\quad +$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$ D.n.e

∴ not cont. at $x=0$

Thm:

$(f.g)$ cont. at $x=c$

Then $f \pm g, \frac{f}{g}$ ⇒ cont. at $x=c$

$g(c) \neq 0$ ←

Thm:-

If:- ① $\lim_{x \to c} g(x) = L$

② f cont at $x=L$

Then $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x))$

$\Rightarrow f(L)$

Thm:-

If:- ① g is cont. at $x=c$

② f is cont. at $g(c)$

Then: $(f \circ g)$ is cont. at c

Ex:- ① $f(x) = x^2+2$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3x-2, & x=2 \end{cases}$$

Is $\frac{f}{g}$ cont. at $x=2$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$\Rightarrow \boxed{4}$

$g(2) = 3(2)-2 = \boxed{4}$

$g(x)$ cont. at $x=2$

$f(x)$ Cont. at $x=2$

$g(2) = 4 \neq 0$

Then:- $\frac{f}{g}$ cont. at $\boxed{x=2}$

Ex:-②

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; x\neq 2\\ -1 & ; x=2\end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases}4x-10 & , x\neq 4\\ 6 & , x=4\end{cases}$$

Is (fog) cont. at $x=4$.

$\Rightarrow g(4)=6$, $\lim_{x\to 4} 4x-10=6$

g(x) cont. at $\boxed{x=4}$

f(g(4))

$\Rightarrow f(6)=1$, $\lim_{x\to 6} 1=1$

f(x) cont at $x=g(4)=6$

Then (fog) cont at $x=4$

Ex:-③

Find $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow \sin(2)$

Ex:-④

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} e^{\left(\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{\left(\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow e^{\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\boxed{e^{2\sqrt{2}}}$$

لا تحسبن المجد تمراً أنت آكله
لن تبلغ المجد حتى تلعق الصبرا...

* ملاحظة :- في حالة :-

يوجد (Ln) أو (trig) أو (e) أو أي إقتران آخر فنضع إدخال النهاية للداخل و الخالين وهكذا ذلك ولكن يوجد شرط أن يكون ناتج النهاية داخل مجال الإقتران الخارجي.

فكان معطاة معرفة "طبق على" الطريقة "Direct"

إيجاد الثوابت.

إذا قال الإقتران متصل أو وجد x=a أو "every where" فهي الثوابت توفي:

$\lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-} = \lim_{x\to a} = f(a)$

$x>a \quad x<a \quad x\neq a \quad x=a$

* طريقة الحل وهي مهمة

Ex:- $f(x) = \begin{cases} x+k & , x>2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} & , x\leq 2 \end{cases}$

f(x) cont on [0,4]; find the constant K ?!!?!!

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} x+k = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$

$\Rightarrow f(2)+k = \frac{2-2}{\sqrt{(2)+2}} \Rightarrow 2+k=0$

$\boxed{k=-2}$

Ex:- $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x=a \\ \frac{x^2-a^2}{x-a} & , x\neq a \end{cases}$

Then:- f(x) cont at $\boxed{x=a}$; find a

$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = f(a)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} a+x = a^2+1 \Rightarrow 2a = a^2+1$

$\Rightarrow a^2-2a+1=0$

صفحة : {93} خط : عبد الله دياك

مكتبة خواطر

خارج...

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$

$(a-1)(a-1) = 0$

$\boxed{a = 1}$ #

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \tan\frac{kx}{2x} & , x \neq 0 \\ k^2 & , x = 0 \end{cases}$

Then :-

Find the value of "k", That make the function cont. every where ?

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan kx}{2x} = f(0)$

$\Rightarrow \frac{k}{2} = k^2 \Rightarrow 2k^2 - k = 0$

$\underline{k = 0}$, $\underline{k = \frac{1}{2}}$

Ex :- where $f(x) = \sec(x)$ is discontinuous on $[0, 2\pi]$?

$\Rightarrow \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow [0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ($\cos x = 0$)

$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

$\Rightarrow$ Then $f(x)$ discontinuous at $x = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

Intermediate-Value thm :-

1) f cont on $[a, b]$

2) "k" any number between $f(a)$ & $f(b)$; i.e. $f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow$ Then $\exists$ at least $c \in (a, b)$ such that $f(c) = k$

⇒ Then: ∃ at least $c \in (a,b)$ such that $k=0=f(c)$

(*) بالمختصر إذا كانت صورة طرف موجب وصورة طرف سالب يوجد صورة تساوي صفر (0) حيث (c) وهذا (c) بين $[a,b]$

Exe-① Show that the equation $x^3+x^2-2x=1$ has one solution in $[-1,1]$

(*) في حالة كانت العبارة معطاة على شكل معادلة

⇒ أحضر إشي تساويها بالصفر

$\Rightarrow \underbrace{x^3+x^2-2x-1=0}_{f(x)}$

$f(x)$ cont on $[-1,1]$

$f(-1)=1>0$ ⇒ positive موجب

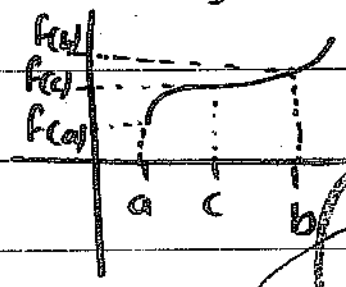
$f(1)=-1<0$ ⇒ negative سالب

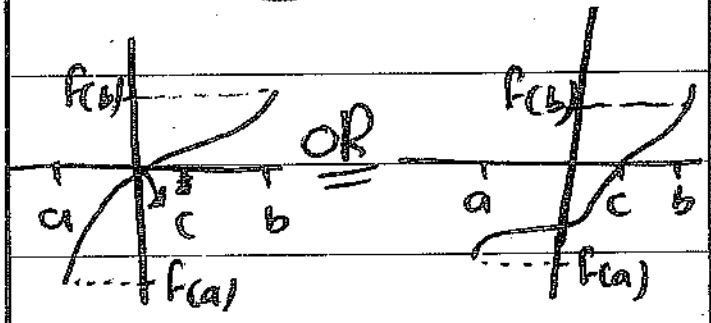
Then ∃ at least $c \in (-1,1)$ such that $f(c)=0$

⇐ بالمختصر: بحيث إذا كان

الاقتران متصل على فترة هناك عدد (c) داخل الفترة له قيمة (صورة / f(c)) بين صورة طرف

الفترة اليمين واليسار





① f cont on $[a,b]$:- حالة ظاهرة

② $f(a)$ & $f(b)$ are non zero & have opposite signs

Ex: ⑥

في حالة كانت الفترة غير معطاه فإنه فترة بالحقيق ويجب أن يكون أطراف الفترة واحد موجب والثاني سالب

Show that the equation $x^3 - x - 1 = 0$ has at least one roots.

$\Rightarrow f(0) = -1 < 0$] [0,2]

$\Rightarrow f(1) = -1 < 0$

$\Rightarrow f(2) = 5 > 0$

Then ∃ at least $c \in (0,2)$ such that $f(c) = 0$

Ex8- If $f(x) = x^2 + 5x - 1$ show that ∃ at least $c \in (1,2)$ such that $f(c) = 7$?

$f(1) = 5$, $f(2) = 13$

∴ "7" number between (5, 13) Then ∃ at least solution $c \in (1,2)$ such that $f(c) = 7$.

⊛ طبعاً السؤال بالإحقان بيجي زي هيك ↓↓↓↓↓

هلأ في إلي فوق طالبيوا منه طريقة حل السؤال، بكون مع دالة و مكالك انه يقلك هذا تحقق أطراف الفترات لازم واحد موجب والثاني سالب.

Ex9- The equation $x^3 + 3x = 2$ has solution in?

a) [1,3] b) [1,2] c) [2,3] d) [0,1]

⇐ لازم طرف موجب والثاني سالب بس

مكتبة خواطر

تابع...

Ex:-

$\Rightarrow x^3 + 3x - 2 = 0$

$f(1) = 2 > 0$ a) ✗

$f(3) = 34 > 0$

$f(1) = 2 > 0$ b) ✗

$f(2) = 12 > 0$

$f(2) = 12 > 0$

$f(3) = 34 > 0$

$f(0) = -2 < 0$ c) ✓

$f(1) = 2 > 0$

Then $[0,1]$

Ex:- The equation

$3x^2 + 2x - 8 = 0$

has at least a solution

inside the interval ?

a) $(-1,0)$ b) $(1,2)$ c) $(a,1)$ d)

it has no solution

$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 2x - 8$

$f(-1) = -7 < 0$ a) ✗

$f(0) = -8 < 0$

$f(1) = -3 < 0$ b) ✓

$f(2) = 8 > 0$

Then interval $(1,2)$

Ex: "حالي"

If f, g cont on $[a,b]$

& $f(a) > g(a)$

$f(b) < g(b)$ show that

there is a root of the

equation $f(x) = g(x)$?!

$\Rightarrow \underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)} = 0$

$h(a) = f(a) - g(a) > 0$ لأن $f(a)$ أكبر من $g(a)$

$h(b) = f(b) - g(b) < 0$ لأن $f(b)$ أصغر من $g(b)$

Then $\exists$ at least $x \in (a,b)$ such that $h(x) = \infty$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = \infty$

$\Rightarrow f(x) = g(x)$ #

Ex: find a & b such that

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$$

بما أن المقام يساوي صفر إذن
البسط يساوي صفر لإنه الجواب
يساوي صفر

$\Rightarrow \sqrt{ax+b} - 2 = 0$; $x = 0$

$\sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+4} - 2}{x} * \frac{\sqrt{ax+4} + 2}{\sqrt{ax+4} + 2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(ax+4) - 4}{x * (\sqrt{ax+4} + 2)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax}{x(\sqrt{ax+4} + 2)} = 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{4} + 2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} = 1$$

$\boxed{a = 4}$

فيرست كمراسيد

Choose the best correct answer (2.5 points for each)

جميع الحلول
ملف الصفحة

1) If $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{x-1}{x-2}$, then the domain of $(fog)(x)$ is

a) $\mathbb{R}-\{-1,-2\}$ b)$\mathbb{R}-\{1,2\}$ c)$\mathbb{R}-\{-1\}$ d) $\mathbb{R}-\{-2\}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2+x-6}$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{15}$ c) 2 d) -2

3) $\cos^{-1}(\cos(\frac{11\pi}{7}))$

ايمن زيود الموسيقى الامال

a) $\frac{11\pi}{7}$ b) $\frac{4\pi}{7}$ c) $\frac{3\pi}{7}$ d) $\frac{6\pi}{7}$

4) Let $3e^{2x}=1$, then the value of x is

a) $-\frac{1}{2}ln3$ b) $\frac{1}{2}ln3$ c) $-ln\frac{1}{3}$ d) $2ln\frac{1}{3}$

5) The vertical asymptote(s) of $f(x)=\frac{x^2-4}{(x-2)(x-3)(x+2)}$

a) $x=2,x=3,x=-3$ b) $x=3,x=-3$ c) $x=3$ d) $x=2,x=-3$

6) The range of $f(x)=\frac{1-6x}{2x-1}$ is

a) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ b)$\mathbb{R}-\{3\}$ c)$\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ d) $\mathbb{R}-\{-3\}$

7) $sin(tan^{-1}(x))=$

a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(٥)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

8) The range of $g(x) = x^2 - 2x - 3$ is:

a) $[4, \infty)$ b) $[-4, \infty)$ c) $(-\infty, 4]$ d) $(-\infty, -4]$

9) If $f(x) = x^3 + 3x - 20$, then $f^{-1}(16) =$

a) -2 b) 2 c) -3 d) 3

10) $\log_2 18 + \log_2 24 - \log_2 54 =$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

11) If $\ln(x^2 - 5) - \ln(4x) = 0$, then

a) $x = 5$ b) $x = -1$ c) $x = -1, x = 5$ d) $x = 0$

12) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9}$

a) -3 b) 3 c) $+\infty$ d) $-\infty$

ايمن زيود #دوسية الامال

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q1) $D_{g(x)} = R - \{2\}$

$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{x-2}{x-1}$

Domain $R - \{1\}$

$R - \{1\} \cap R - \{2\} \Rightarrow R - \{1,2\}$

b

Q2) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2+x-6} * \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+5)-9}{(x+3)(x-2)} * \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x+3)(x-2)} * \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} * \frac{4}{5} = \frac{4}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}$

b

Q3) $\cos^{-1}(\cos(\frac{11\pi}{7}))$

ربع رابع

$2\pi - \frac{11\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}$

$\cos^{-1}(\cos(\frac{3\pi}{7})) = \frac{3\pi}{7}$

c

Q4) $3e^{2x} = 1$

$e^{2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln(\frac{1}{3})$

$2x = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$

$= \frac{1}{2}\ln(3)^{-1} = \boxed{\frac{-1}{2}\ln 3}$

a

Q5) $(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{4}{-4} = -1$

not vertical

$(x-3)=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3}$

d.n.e vertical

$(x+2)=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3} = \frac{-1}{5}$

not vertical

Then $\boxed{x=3}$ vertical

C

Q6) $f(x) = \frac{1-6x}{2x-1}$

$y = \frac{1-6x}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = 1-6x$

$\Rightarrow 2xy + 6x = 1+y$

$x = \frac{1+y}{(2y+6)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+x}{2x+6}$

Domain $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

Domain $f^{-1}(x) = R - \{-3\}$

Then Range $f(x) = R - \{-3\}$

d

مكتبة خواطر

Q9) $f^{-1}(16) = ?$

$f(x) = x^3 + 3x - 20$

$\Rightarrow 16 = x^3 + 3x - 20$

$\Rightarrow x^3 + 3x - 36 = 0$

بالتجريب $\boxed{x = 3}$

d

Q10) $\log_2 18 + \log_2 24 - \log_2 54$

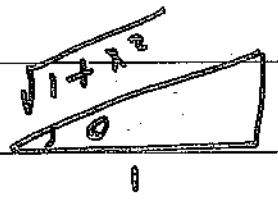
$\log_2 \left(\frac{18 \cdot 24}{54}\right) = \log_2 (2 \cdot 4)$

$= \log_2 (2 \cdot 4) = \log_2 8$

$= \log_2 (2)^3 = \boxed{3}$

c

Q7) $\sin(\tan^{-1}(x))$



$\theta = \tan^{-1}(x)$

$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b

Q8) $g(x) = x^2 + 2x - 3$

$a = 1 \quad b = +2 \quad c = -3$

$\boxed{\frac{-b}{2a}}$

$\hookrightarrow \frac{+2}{2} = 1 \quad \therefore f(1) = -4$

$a > 0$

$[f(\frac{-b}{2a}), \infty) \Rightarrow [-4, \infty)$

b

Q11) $\ln(x^2-5) = \ln(4x)$

نأخذ e

$\Rightarrow x^2-5 = 4x$

$\Rightarrow x^2-4x-5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$x=5 \quad , \quad x=-1$

$\because x=5 \in$ Domain ✓

$\because x=-1 \notin$ Domain ✗

Then $x=5$

Q

Q12) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\text{عدد}}{0}$

طالما من اليمين خذ عدد اكبر

لتتأكد

مثلا (1)

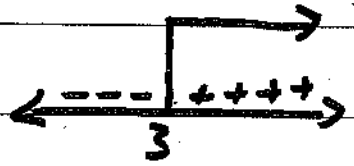
$\lim_{x\to 4^+} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{7}{7} > 0$

Then $+\infty$

OR

حل آخر

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$



Then $+\infty$

C

الأمثل
السبيل الوحيد للنجاح
بشيء عظيم ... هو
أن تحب ما تفعله

Derivative

الإشتقاق

* Where C is a constant:-

⊛ قاعدة ②

f(x)	f'(x)
C	0
3	0
-7	0
$-3\pi/2$	0
$(\pi)^2 \neq 1$	0
e	0
$e^{3/\pi}$	0
$\sin 2$	0
cos 3	0

⊛ قاعدة ③

y	y'
x^n	nx^{n-1}
x^4	$4x^3$
x^{-7}	$-7x^{-8}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$-3x^{-4}$
$\sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$	$(3/4)x^{(-1/4)}$
$\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$	$(5/3)x^{(2/3)}$

إذا ذكرت بالسؤال بيكون
المطلوب المشتقة
الكل $\{f', y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d(f(x))}{dx}\}$

هذا التعريف هام للاشتقاق

⊛ $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$

⊛ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

⊛ Rules Derivation :-

قواعد الإشتقاق

⊛ قاعدة ①

f(x)	$\frac{df}{dx}$
cx	c
πx	π
$e^2 x$	e^2
$(\tan(5))x$	tan 5
$\sqrt{2}x$	$\sqrt{2}$

④ قاعدة

$g(x)$	$\frac{d(g(x))}{dx}$
$cf(x)$	$cf'(x)$
$\frac{f(x)}{c}$	$\frac{1}{c}\cdot f'(x)$
$(f(x) \pm h(x))$	$(f'(x) \pm h'(x))$
$5x^{-4}$	$-20x^{-5}$
$\frac{x^3}{5}$	$\frac{3x^2}{5}$
$x^4 + x^{-3}$	$4x^3 - 3x^{-4}$
$2x^5 - 4x^3$	$10x^4 - 12x^2$

⑤ قاعدة

$g(x)$	$\frac{d(g(x))}{dx}$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$\sqrt{5x^3}$	$\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}}$
$\sqrt{3x^{-5}}$	$\frac{-15x^{-6}}{2\sqrt{3x^{-5}}}$

⑥ $(f\cdot g)'(x) = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

الأول في مشتق الثاني + الثاني في مشتق الأول.

⑦ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

المقام في مشتق البسط - البسط في مشتق المقام

(المقام)^2

⑧ المشتقة للفرق في المشتقة

قاعدة ???? لا توزع المشتقة

الضرب في القسمة

⑨ المشتقة توزع على الجمع والطرح

Ex:- $f(x) = (x^2+1)(x^3-2)$; find $f'(x)$?

$f'(x) = (x^2+1)\cdot 3x^2 + 2x(x^3-2)$

Ex:- find $f'(x)$ if $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$?

$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 3 - (3x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=$

قاعدة special

$\left(\frac{c}{f}\right)'(x) = \frac{-c * f'(x)}{f^2(x)}$

سالب الثابت * مشتقة المقام

(المقام)^2

مشتقة ثابت على اقتران.

Ex:- $f(x) = \frac{2}{x^3-3}$

$\Rightarrow \frac{-2 * (3x^2)}{(x^3-3)^2} = \frac{-6x^2}{(x^3-3)^2}$

Ex:- Find $\frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$

$\Rightarrow d\left(x^2 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \frac{d(-1)}{dx} = 0$

* قاعدة

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

مشتقة الداخلي ضرب مشتقة الخارجي.

مع ثبات الداخلي (ر و)

تابع ....

$f'(x) = \frac{3x^2+3-(6x^2+8x)}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow \frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$

Ex:- Find $\frac{d}{dx}(\sqrt{x} \cdot (x^2+1))$

$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot (2x) + (x^2+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2+1)}{2\sqrt{x}}$

Ex:- If $f(3) = -4$, $f'(3) = \frac{5}{2}$

$g(3) = 2$, $g'(3) = -3$

Find:- $\left(\frac{3g}{f}\right)'(2)$ & $\left(\frac{3g}{f}(2)\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{3g}{f}\right)'(2) = 3\left(\frac{f(3)g'(3) - g(3)f'(3)}{f^2(3)}\right)$

$\Rightarrow 3\left(\frac{(-4)(-3) - (2)(5)}{(-4)^2}\right)$

$\Rightarrow 3\left(\frac{12-10}{16}\right) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \left(3g_f(2)\right)' = 0$ لأنه ثابت

Ex:- If $f(3x)=4x^3+2x^2$

Find $f'(2)$

$\Rightarrow 3.f'(3x)=12x^2+4x$

$\Rightarrow f'(3x)=\frac{12x^2+4x}{3}$

نفرض $y=3x \Rightarrow x=\frac{y}{3}$

$\Rightarrow f'(y)=\frac{12(\frac{y}{3})^2+4(\frac{y}{3})}{3}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{12(\frac{x}{3})^2+4(\frac{x}{3})}{3}$

$\Rightarrow f'(2)=\frac{12(\frac{2}{3})^2+4*(2)}{3}$

$\Rightarrow \frac{12(\frac{4}{9})+\frac{8}{3}}{3}$

$\Rightarrow \frac{\frac{16}{3}+\frac{8}{3}}{3} \Rightarrow \frac{\frac{24}{3}}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{24}{9}}$

Ex:- If $f(2x)=3x^2+8x$;

Find $f'(2)$?

$\Rightarrow 2f'(2x)=6x+8$

$\Rightarrow f'(2x)=3x+4$

Let $y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$

$\Rightarrow f'(y)=3(\frac{y}{2})+4$

$\Rightarrow f'(x)=3(\frac{x}{2})+4$

$\Rightarrow f'(2)=3(\frac{2}{2})+4=\boxed{7}$

Ex:- $f(x)=x^3$, $g(x)=3x^2+2$

Find $(fog)'(x)$

$\Rightarrow f'(g(x)).g'(x)$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2$, $f'(g(x))=3(g(x))^2$

$\Rightarrow 3(3x^2+2)^2$

$\Rightarrow (fog)'(x)=\underbrace{3(3x^2+2)^2}_{f'(g(x))}.\underbrace{6x}_{g'(x)}$

$\Rightarrow 18x(3x^2+2)^2$

Ex:- If $f'(4)=5$, $g(-2)=4$

$g'(-2)=5$

Find

↳ $(f\circ g)'(-2)$

$\Rightarrow f'(g(-2)).g'(-2)$

$\Rightarrow f'(4)*5 = 5*5 = 25$

Ex:- $h(x)=f(g(x))$

$g(2)=5$, $f'(5)=21$

$h'(2)=5$, find $g'(2)$

$h'(x)=f'(g(x)).g'(x)$

$\Rightarrow h'(2)=f'(g(2)).g'(2)$

$\Rightarrow 5=f'(5).g'(2) \Rightarrow g'(2)=\frac{5}{21}$

Ex:- $f(x^3)=\frac{1}{x}$, find $f'(8)$

$\Rightarrow 3x^2 f'(x^3)=\frac{-1}{x^2}$

let $y=x^3$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(\sqrt[3]{y})^2 f'(y)=\frac{-1}{(\sqrt[3]{y})^2}$

$\Rightarrow 3(\sqrt[3]{8})^2 f'(8)=\frac{-1}{(\sqrt[3]{8})^2}$

$\Rightarrow 3(2)^2 f'(8)=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f'(8)=\frac{-1}{48}$

Ex:- $\frac{d(f(x))}{dx}$ If

$\frac{d(f(2x))}{dx}=12x+4$ ؟

⇐ هذا السؤال يكمل إذا عرفنا

مشتقة $f(2x)$ يساوي $12x+4$

$\Rightarrow f'(2x) \Rightarrow 2f'(2x)=12x+4$

$\Rightarrow f'(2x)=6x+2$

Let $y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$

$\Rightarrow f'(y)=6(\frac{y}{2})+2$

$\Rightarrow f'(x)=6(\frac{x}{2})+2$

$\Rightarrow 3x+2=f'(x)$

2B or not 2B

مكتبة خواطر

* قاعدة

$$\frac{d}{dx}(f(x)^n) = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

Ex:- find y'

① $y = \cos(3x+2) \Rightarrow y'$

$\Rightarrow -3\sin(3x+2)$

② $y = \tan(x) + 4x^2\sin(x)$

$\Rightarrow y' = \sec^2 x + (4x^2\cos(x) + 8x\sin x)$

③ $y = \cot^2 x$

$\Rightarrow y' = 2\cot x \cdot (-\csc^2(x))$

$\Rightarrow +2\csc^2(x)\cdot\cot(x)\cdot$

④ $y = 2x + \csc^3(x)$

$\Rightarrow y' = 2 + 3(\csc(x))^2 \cdot (-\csc(x)\cdot\cot(x))$

$\Rightarrow y' = 2 - 3\csc^3(x)\cdot\cot(x)$

⑤ $y = \tan\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow y' = \sec^2(\sqrt{x-1}) \cdot \frac{1}{2(\sqrt{x-1})}$

$\Rightarrow y' = \frac{\sec^2(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}}$

Ex:- $g(x) = f(2x+1)^7$; find $\frac{dg}{dx}$

$\Rightarrow g'(x) = 7 \underbrace{f^6(2x+1)}_{(f(x))^{n-1}} \cdot \underbrace{f'(2x+1)\cdot 2}_{\frac{d}{dx}(f(2x+1))}$

Ex:- $f(x) = (x^4+5)^8$

$\Rightarrow f'(x) = 8(x^4+5)^7 \cdot 4x^3$

$\Rightarrow f'(x) = 32x^3(x^4+5)^7$ #

* قاعدة حفظ البسكم صعب جدا 😊

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(g(x))$	$g'(x)\cdot\cos(g(x))$
$\cos(g(x))$	$-g'(x)\cdot\sin(g(x))$
$\tan(g(x))$	$g'(x)\cdot\sec^2 g(x)$
$\cot(g(x))$	$-g'(x)\cdot\csc^2(g(x))$
$\sec(g(x))$	$g'(x)\sec(g(x))\tan(g(x))$
$\csc(g(x))$	$-g'(x)\cdot\csc(g(x))\cot(g(x))$

⑩ find $f'(\pi)$ if $f(x) = \frac{1}{\cos x}$?

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

$\Rightarrow (-1) \cdot 0 = \boxed{0}$

قاعدة السلسلة في الاشتقاق

$\Leftarrow$ مشتقة y $\leftarrow$ y'

$\Leftarrow$ مشتقة x $\leftarrow$ 1

عندما نشتق بالنسبة لـ (x)

$\frac{dy}{dx}$

$\Leftarrow$ مشتقة z $\leftarrow$ z'

$\Leftarrow$ مشتقة t $\leftarrow$ 1

عندما نشتق بالنسبة لـ (t)

$\frac{dz}{dt}$

✖ هنا نظلع اظلع بكل (y', z') كالها "موضح الطاين"

⑥ $y = \cos x \cdot \tan x$

$\Rightarrow y \Rightarrow \cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$y' = \cos(x)$

⑦ $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

$\Rightarrow y' = \sec^2(x)$

⑧ $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ حلاقة

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow y' = 0$

⑨ $y = x \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Rightarrow y = x \cdot \cot(x)$

$\Rightarrow y' = ((x \cdot -\csc^2(x)) + \cot x)$

$\Rightarrow y' = -x \csc^2 x + \cot x$

مكتبة خواطر

Ex:- I F:-

$yx + y^2 + 1 = x$; find y'

$\Rightarrow (y + xy') + 2yy' = 1$

$\Rightarrow xy' + 2yy' = 1 - y$

$\Rightarrow y'(x + 2y) = (1 - y)$

$\Rightarrow y' = \left(\frac{1-y}{x+2y}\right)$

Ex:- $x^2 + xy = 1$, Find $\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 2x + (xy' + y) = 0$

$\Rightarrow xy' = -2x - y$

$\Rightarrow y' = \frac{-2x - y}{x}$

⇐ عملياً إن طلب الاستقرار عند نقطة
رح نحتاج قيمة "y" بدلالة "x"
بالمعادلة الأصلية ونطلع قيمة "y"

Ex:-

Find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$

If $2x^2 - 2y^3 = -8$ ؟؟!!

$\Rightarrow 2(2)^2 - 2y^3 = -8 \Rightarrow -2y^3 = -16$

$y^3 = 8 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

$\Rightarrow 4x - 6y^2 y' = 0$

$\Rightarrow y' = \frac{4x}{6y^2} = \frac{2x}{3y^2}$

$\Rightarrow \left.y'\right|_{\substack{x=2 \\ y=2}} \Rightarrow \frac{2(2)}{3(2)^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Ex:- Find $\frac{dy}{dx}$ for $\cos(xy^2) = y$?

$\Rightarrow ((2xyy') + y^2)(-\sin(xy^2)) = y'$

$\Rightarrow 2xy\,y'(-\sin(xy^2)) + y^2(-\sin(xy^2)) = y'$

$\Rightarrow -\sin(xy^2).y^2 = y' + 2xy\sin(xy^2)\,y'$

$\Rightarrow y'(1 + 2xy\sin(xy^2)) = -y^2\sin(xy^2)$

$\Rightarrow y' = \frac{-y^2\sin(xy^2)}{1 + 2xy\sin(xy^2)}$

(*) قاعدة القسمة:

3) $f(x)=\log_{h(x)}^{g(x)} \rightarrow f(x)=\frac{\ln(g(x))}{\ln(h(x))}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{g'(x)}{g(x)}\cdot\ln(h(x))-\frac{h'(x)}{h(x)}\cdot\ln(g(x))}{(\ln(h(x)))^2}$

4) $f(x)=\log_c\left(\frac{f(x)\cdot g(x)\cdot m(x)}{L(x)\cdot z(x)}\right)$

$\Rightarrow f(x)=\log_c(h(x))+\log_c(g(x))+\log_c(w(x))-\log_c(\ln(x))-\log_c(z(x))$

$\rightarrow f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)\cdot\ln c}+\frac{g'(x)}{g(x)\cdot\ln c}+\frac{m'(x)}{m(x)\cdot\ln c}-\frac{L'(x)}{\ln(x)\cdot\ln c}-\frac{z'(x)}{z(x)\cdot\ln c}$

لاتخف.... الحل جاهز.... دائماً... بالكرادة.... وضع العنوان.... #

مثال: إذا كان $f(2)=2, f'(2)=4$,

$f(y^2x)=2yf(x)$; Find $\frac{dy}{dx}$ when $(x,y)=(2,1)$

$\Rightarrow (y^2+2xyy')f'(y^2x)=2yf'(x)+2f(x)y'$

$\Rightarrow ((1)^2+2(2)(1)y')f'(2)=2(1)f'(2)+2f(2)y'$

$\Rightarrow (1+4y')4=8+4y'$

$\Rightarrow 4+4y'=8+4y' \Rightarrow 16y'=8+4y'$

$\Rightarrow 12y'=4 \Rightarrow y'=\frac{1}{3}$ ✓ ملاحظة

1) $f(x)=\log_c^{(g(x))} \rightarrow f'(x)$

$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)\cdot\ln c}$

2) $f(x)=\ln g(x) \rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

Ex :- Find "y'"

① $y = \log(x^3+x)$

$\Rightarrow y' = \frac{3x^2+1}{(x^3+x)\ln(10)}$

② $y = \ln(\sin(x))$

$y' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot x$

③ $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

④ $y = \log_{(x+1)}^{5} \Rightarrow y = \frac{\ln(5)}{\ln(x+1)}$

$\Rightarrow y' = \frac{-\ln(5)\cdot\frac{1}{x+1}}{(\ln x+1)^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{-\ln 5}{(x+1)(\ln x+1)^2}$

⑤ $y = \sqrt[3]{(\ln x)^2}$

$\Rightarrow y = (\ln x)^{2/3}$

$\Rightarrow y' = \frac{2}{3}(\ln x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{2}{3x(\ln x)^{\frac{1}{3}}}$

⑥ $y = \ln(\ln x)$

$\Rightarrow y' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

$\Rightarrow \frac{1}{x\ln(x)}$ #

⑦ $y = \ln\left(\frac{x\cdot\sin x}{x+1}\right)$

$\Rightarrow y = \ln(x^2) + \ln(\sin x) - \ln(x+1)$

$\Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{(x+1)}$

⑧ $y = \log_{(x+2)}^{(x+3)}$

$\Rightarrow y = \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+2)}$

حالة خاصة: $y = (f(x))^{g(x)}$

$\Rightarrow \ln y = \ln (f(x))^{g(x)}$

$\Rightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \cdot \ln f(x)$

$\Rightarrow y' = \left(g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \cdot \ln f(x)\right) \cdot y$

$\Rightarrow y' = (f(x))^{g(x)} \left(g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \cdot \ln f(x)\right)$

Ex/ Find y'

① $y = 2^{\tan(x)}$

$\Rightarrow y' = \sec^2(x) \cdot 2^{\tan x} \cdot \ln(2)$

② $y = (\pi)^{\cos(x)+1}$

$\Rightarrow y' = (-\sin x) \cdot (\pi)^{(\cos(x)+1)} \cdot \ln \pi$

③ $y = e^{(5x^2+2)}$

$\Rightarrow y' = 10x \, e^{5x^2+2}$

تابع...

$\Rightarrow y' = \frac{\ln(x+2) \cdot \frac{1}{x+3} - \ln(x+3) \cdot \frac{1}{x+2}}{(\ln(x+2))^2}$

$y' = \frac{\frac{\ln(x+2)}{(x+3)} - \frac{\ln(x+3)}{x+2}}{(\ln(x+2))^2}$

ملاحظة: في الاقتران الثابت

① $f(x) = c^{g(x)} \Rightarrow g'(x) \cdot c^{g(x)} \cdot \ln c$

ثابت $\Leftarrow$ "c" $\Leftarrow$ ثابت وليس اقتران.

② $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow g'(x) \cdot e^{g(x)}$

ملاحظة:

$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$

(اقتران)

$y = c^{g(x)} \Rightarrow y' = g'(x) \cdot c^{g(x)} \cdot \ln c$

(عدد) اقتران

④ $y = e^{\sin x + \cos x}$

$\Rightarrow y' = (\cos x - \sin x) \cdot e^{(\sin x + \cos x)}$

⑤ $y = \log_{(\ln x)} e$

$\Rightarrow y = \frac{\ln e}{\ln(\ln x)} = \frac{1}{\ln(\ln x)}$

$\Rightarrow y' = \frac{-1 * \frac{1}{x \ln x}}{(\ln(\ln x))^2} = \frac{-1}{x \ln x (\ln(\ln x))^2}$

⑥ $y = (x)^{(x)}$

$\Rightarrow \ln y = x \ln x$

$\frac{y'}{y} = x \cdot (\frac{1}{x}) + \ln x$

$y' = x^x (1 + \ln x)$

⑦ $x^y = y^x$.

$\Rightarrow \ln x^y = \ln y^x$

$\Rightarrow y \ln x = x \ln y$

$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{x} + y' \cdot \ln x = x \cdot \frac{y'}{y} + \ln y$

$y' \cdot \ln x - x \cdot \frac{y'}{y} = \ln x - \frac{y}{x}$

مشتقة اللوغاريتمي

Ex: If $y = x^{\sin x}$, Then find y'

$\Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$

$\Rightarrow (\ln y = \sin x \ln x)'$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = (\sin x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \cos x)$

$y' = \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right) \cdot x^{\sin x}$

Ex:
$y = (\cos(x))^x \Rightarrow$ find y'

$\Rightarrow (\ln y = \ln(\cos(x))^x)' \Rightarrow (\ln y = x \cdot \ln\cos x)'$

$\frac{y'}{y} = (x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln\cos x)$

$y' = (-x \tan x + \ln\cos x) \cdot y$

$y' = (-x\tan x + \ln\cos(x)) \cdot (\cos(x))^x$

فك: عبد الله رياض

طريقة Inverse

If f, f_n is diff $f(1-1)$, Then

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

خطوات الحل:-

① بطلع $f^{-1}(x)$ عشان النقطة اللي طالبها

مثلاً:- $f^{-1}(2) \in$ بتروح لـ $f(x)$ لو كان $f(x) \geq$

② بطلع قيم "x" اللي أخدناها

③ بساوي $f(x)$ بـ "x" اللي جوه فيه "x"

اي طلعها من $f^{-1}(x)$

④ القانون $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

ملاحظة ☺:-

أول ما تشوف ☺ "تقبل" تشطب f مع f^{-1}

وتشوف قانون من جنسك "اهنا بتشطب f مع f^{-1}"

☺☺ شطبت f مع f^{-1}

☹ شطبت الـ

رقم الصفحة "101"

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

« أين الزيود »

قاعدة: إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية
Inverse trigonomial

$\sin^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$
$\cos^{-1}(g(x))$	$\frac{-g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$
$\tan^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$
$\cot^{-1}(g(x))$	$\frac{-g'(x)}{1+(g(x))^2}$
$\sec^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{\lvert g(x)\rvert\sqrt{(g(x))^2-1}}$
$\csc^{-1}(g(x))$	$\frac{-g'(x)}{\lvert g(x)\rvert\sqrt{(g(x))^2-1}}$

Ex:- $f(x)=x^3-2x$, find $(f^{-1})'(-1)$

$-1=x^3-2x \Rightarrow$ بالتجريب $\Leftarrow \boxed{x=1}$ الحل

$-1=(1)^3-2(1) \Rightarrow -1=-1$ صح

$f'(x)=3x^2-2$

$f'(1)=3-2=1$

$\frac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$

Ex:- $f(x)=5x^3+x-7$, then find $(f^{-1})'(-1)$?

$\Rightarrow f^{-1}(-1) \Rightarrow -1=5x^3+x-7 \Rightarrow 5x^3+x-6=0$

$\boxed{x=1}$

$f'(x)=15x+1 \Rightarrow f'(1)=15(1)+1=\boxed{16}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\boxed{\frac{1}{16}}$

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

« أمثلة إلى يود »

Ex:- find y'

① $y = \sin^{-1}(e^x)$

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

② $y = \tan^{-1}(x^2)$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^4}$$

③ $y = e^{\sec^{-1}((3)^{\sin x})}$

$$\Rightarrow y' = \frac{3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3}{|(3)^{\sin x}| \sqrt{(3)^{2\sin x} - 1}} \cdot e^{\sec^{-1}((3)^{\sin x})}$$

④ $y = \ln(\cos^{-1}(x))$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos^{-1}(x)} = \frac{-1}{\cos^{-1}(x) \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

« فرق بين »

$(\tan^{-1}x)$ و $(\tan x)^{-1}$

$(\tan^{-1}x)$ هاي انفيرست

$(\tan x)^{-1}$ هاي $\frac{1}{\tan x}$

$y = (\tan^{-1}x)$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$y = (\tan x)^{-1}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\tan x} = y' = \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

« رقم الصفحة 143 »

« إعداد عبد الله دياك »

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

#Higher-Derivatives

Ex:- find $\frac{d^4(f(x))}{dx^4}$ for

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 9x^2 + 10x$

$f''(x) = 24x^2 + 18x + 10$

$f'''(x) = 48x + 18$

$f^{(4)}(x) = 48$ #

Ex:- find $\frac{d^{745}(\sin x)}{dx^{745}}$

* هنا إذا كانت المشتقة كبيرة كثير نلازم نوصل للعلاقة.

⇐ طريقة إيجاد المشتقة:

1) بنفل نشتق حتى نوصل للعلاقة

⇐ العلاقة: يعني لما يرجع حدك الأمتان نفسه أو يكون بشبه المشتقات!

2) بنقسم المشتقة اللي معطينا إياها بالسؤال (745) على "أكبر مشتقة اشتقينا حتى وصلنا للعلاقة"

* المشتقات العليا.

رمز المشتقة يكون كان الأس ( ) $f^{(1)}$

و يكون بداخله أي مشتقة $f' \rightarrow f^{(1)}$

$f'' \rightarrow f^{(2)} \Rightarrow f''' \Rightarrow f^{(3)} \Rightarrow \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

$\Rightarrow f^{(4)} \Rightarrow f^{(4)} \Rightarrow \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$

⇐ طريقة إيجاد المشتقات العليا

Ex:- find $f^{(5)}(x)$ for

$f(x) = 2x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 5x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = 10x^4 + 16x^3 + 6x + 5$

$\Rightarrow f''(x) = 40x^3 + 48x^2 + 6$

$\Rightarrow f'''(x) = 120x^2 + 96x$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 240x + 96$

$\Rightarrow f^{(5)}(x) = 240$ #

مكتبة خواطر

في بعض الأحيان بتعرف مشتقتها عن طريق معرفة قاعدة الاشتقاق

$f(x) = x \sin x$

Ex:- find $f^{(51)}(x)$

$f'(x) = x\cos x + \sin x$ نقول

$f''(x) = (-x\sin x + \cos x) + \cos x$

$= -x\sin x + 2\cos x$

$f'''(x) = (-x\sin x + \cos x) + \cos x$

$= -x\sin x + 2\cos x$

$f^{(4)} = (-x\cos x - \sin x) - 2\sin x$

$= -x\cos x - 3\sin x$

$f^{(5)} = (x\sin x - \cos x) - 3\cos x$

$= x\sin x - 4\cos x$

$f^{(6)} = (x\cos x + \sin x) + 4\sin x$

$\Rightarrow x\cos x + 5\sin x$

هان بوقف لأنه توقعلنا بقى:-
إنو إلا قبل كانت مشتقة طبيعية على
الطريق من أول ما بدينا نشتق
لحد هسة.

تابع ....

$f(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''''(x) = \sin(x)$

نقول كالتالي:

$$4\overline{)745}\ 186$$
4
34
32
25
24
1

يعني لازم نشتق لحتى ما يطلع بواقي
لو كان الباقي (1) ← بنشتق مرة
لو كان الباقي (2) ← بنشتق مرتين
لو كان الباقي (3) ← بنشتق ثلاث مرات
لو كان ما في ← بنضايه زيادة هو.

$\therefore \frac{d^{744} f}{dx^{744}} = \sin(x)$

$\Rightarrow \frac{d^{745} f}{dx^{745}} = \cos(x)$ #

$f(x) \Rightarrow x^2 + xy = -1$

$\Rightarrow f'(x) = 2x + (xy' + y) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = 2 + (xy'' + y') + y' = 0$

$\Rightarrow xy'' + 2y' = -2$

$\Rightarrow xy'' = -2y' - 2$

$\Rightarrow y'' = \frac{-2y' - 2}{x}$

$\Rightarrow 2x + xy' + y = 0$

$\Rightarrow y' = \frac{-2x - y}{x}$

$\Rightarrow y'' = \frac{-2y' - 2}{x} \Rightarrow \frac{-2\left(\frac{-2x-y}{x}\right) - 2}{x}$

$\Rightarrow y'' = \frac{4x + 2y}{x} - 2 \Rightarrow \frac{4x + 2y - 2x}{x}$

$\Rightarrow y'' = \frac{4x + 2y - 2x}{x^2} = \frac{2x + 2y}{x^2}$ *

(H.W) If $f(x) = 2x^{\frac{-1}{4}}$ Then find $f''(x)$.

الإجابة

$f''(x) = \frac{5}{8} x^{-\frac{9}{4}}$.

تابع...

بنقول كالتالي:-

بنوجد مشتقة كلا من

بفي الوسط بالطرف بتبع الاشتقاق بكون كالتالي

$\pm x\cos x \pm (1)\sin x$

$\pm x\sin x \pm (1)\cos x$

$\Rightarrow y' = x\cos x + \sin x$

$\Rightarrow y'' = -x\sin x + \cos x + \cos x$

$= f^{(51)}(x)$

بنقدر انزل على الطريقة إي قبل

Ex:- find $\frac{d^2y}{dx^2}$ for

$x^2 + xy = -1$?

$f^{(51)} = -x\cos x - 51\sin x$

صفحة : {116}

خط : عبد الله دياك

مكتبة خواطر

Differentiability

* قابلية الإشتقاق :-

Thm :- The function f(x) is diff at x=a if f'(a) exist

إذا كان f(x) قابل للإشتقاق عند النقطة (a) فإن المشتقة عند (a) تكون موجودة

فكان ضمط إتلاع تحت

Thm :- ① If f(x) diff at x=a Then f(x) cont at x = a

② If f(x) not cont at x=a Then f(x) not diff at x=a

① إذا كان f(x) قابل للإشتقاق عند النقطة (a) فإن f(x) متصل عند النقطة (a)

② إذا كان f(x) غير متصل عند النقطة (a) فإن f(x) يكون غير قابل للإشتقاق عند النقطة a .

إذا كان f(x) متصل ليس بالضرورة أن يكون قابل للإشتقاق

Ex :- If $x^2+y^2=19$, Then Show that $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-19}{y^3}$

$\Rightarrow 2x + 2yy' = 0$

$\therefore y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

$\Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = \frac{-(y - xy')}{y^2}$

$= \frac{-(y - x(-\frac{x}{y}))}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{-(y + \frac{x^2}{y})}{y^2} \Rightarrow \frac{-(\frac{y^2+x^2}{y})}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{-19}{y^3}$

[3] إذا كان الطالب طالب جامعة عندما (فاهم)، سيكون ذاهم توجيهي

ة إذا كان الإقتران قابل للإشتقاق عندما يكون الإقتران متصل

Ex① :- Is f(x) diff at x=0?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & , x\le 0 \\ x+4 & , x>0 \end{cases}$$

نبحث بالحدود

$\lim_{x\to 0^+} x+4 = 4$ ، $\lim_{x\to 0^-} x^2+3 = 3$

∴ f(x) not cont at x=0

∴ f(x) not diff at x=0

Ex② :- Is f(x) diff at x=2

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-12 & , x\ge 2 \\ x^2+x-16 & , x<2 \end{cases}$$

نبحث بالحدود

$\lim_{x\to 2^+} x^2-x-12 = -10$ ، $\lim_{x\to 2^-} x^2+x-16 = -10$

∴ f(x) cont at x=2

إذا خوفنا أنه الطالب الذاهم توجيهي هو الإشتقاق، والطالب الجامعة هو الإشتقاق. وكلنا بنعرف إنو:-

[1] إذا كان التوجيهي رسب عندما لا يمكن يكون طالب جامعة.

ة إذا كان الإقتران غير متصل عندها لا يمكن أن يكون قابل للإشتقاق ☺

[2] إذا نجح الطالب بالتوجيهي فهو يمكن يدخل الجامعة أو لا، حسب الطالب

ة إذا كان الإقتران متصل عندها فهو يمكن أن يكون قابل للإشتقاق أو لا

[X] الطريقة الثانية سنتعلم تعرف علاقة الإتصال بالإشتقاق [خصصها بس] وهي كالتالي:-

نشتق

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 6x, & x<1 \\ 6, & x>1 \end{cases}$

$\Rightarrow f'_+(1) = 6, \quad f'_-(1) = 6$

$\therefore f'_-(1) = f'_+(1)$

$\therefore$ then $f(x)$ is diff at $x=1$

أغلب الأسئلة اللي تيجي بالامتحان تيجي، هي جاهل مثل هيك

إذا مكالك هالسؤال أول شي بدك

تلاقي اشتقاق عندها بنحطي:-

$\lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-} \Rightarrow f'_+(a) = f'_-(a)$

$f(x) = |x-7|$, find $f'(7)$

$f(x) = \begin{cases} x-7, & x \geq 7 \\ 7-x, & x<7 \end{cases}$

cont at $x=7$

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x>7 \\ -1, & x<7 \end{cases}$

$f'(7) = d.n.e$

تابع..

$f(2) = -10$, Then $f(x)$ cont at $x=2$, الآن نشتق

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>2 \\ 2x+1, & x<2 \end{cases}$

نبحث في المماسية بالاشتقاق

$f'_+(2) = 2(2)-1 = 3$

$f'_-(2) = 2(2)+1 = 5$

$\therefore f'_+(2) \neq f'_-(2) \therefore f(x)$ not diff at $x=2$

Ex:-③

$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 1 \\ 6x-3, & x>1 \end{cases}$

Is $f(x)$ diff at $x=1$

نبحث بالاتصال:-

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} 6x-3 = 3$

$f(1) = 3$

$\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3$

$\therefore f(x)$ cont at $x=1$

Ex:- If $f(x)$ is diff at $x=1$, Then find the value of a & b?

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & x\geq 1 \\ 3x^2+bx, & x\leq 1 \end{cases}$$

بما أن $f(x)$ قابل للاشتقاق فهو مستمر

$$\lim_{x\to 1^+} ax^2+b = \lim_{x\to 1^-} 3x^2+bx$$

$$\Rightarrow a+b = 3+b$$

$$\therefore \boxed{a=3}$$

أيضاً

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax, & x>1 \\ 6x+b, & x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a(1) = 6(1)+b$$

$$\Rightarrow 2(3)(1) = b+6$$

$$b=6-6 \Rightarrow \boxed{b=0} \quad *$$

Ex:-

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-bx, & x\leq 2 \\ 4-bx^3+ax, & x>2 \end{cases}$$

If $f(x)$ diff at $x=2$ find a,b ?

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} 4-bx^3+ax = \lim_{x\to 2^-} ax^2-bx$$

$$\Rightarrow 4-b(8)+a(2) = a(4)-b(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{4-6b-2a=0} \quad \cdots (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax-b, & x<2 \\ -3bx^2+a, & x>2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(2) = f'_-(2)$$

$$\Rightarrow -3b(4)+a = 2a(2)-b$$

$$\Rightarrow 11b+3a=0, \quad \boxed{a=\frac{-11b}{3}}$$

بالتعويض بالأول

$\Rightarrow$

$-2a+b=-4b+a$

$\Rightarrow -3a=-5b$

$\Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{5}a}$ ---(2)

بالتعويض في (1) ونجد

$\Rightarrow 3b-2a=1$

$\Rightarrow \frac{3}{5}(3a)-2a=1 \quad / *5$

$\Rightarrow 9a-10a=5$

$\Rightarrow \boxed{a=-5} \Rightarrow \boxed{b=-3}$

تعريف - الاشتقاق

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$3*/\ 4-6b-2\left(\frac{-11b}{3}\right)=\infty$

$\Rightarrow 12-18b+22b=\infty$

$\Rightarrow \boxed{b=-3}$

$\therefore a=\frac{-11(3)}{3} \Rightarrow \boxed{a=+11}$ #

Ex:- If $f(x)$ is diff at $\boxed{x=-1}$

Then, find the values of (a,b)

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & x>-1 \\ 2bx^2+ax, & x\le -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^+} ax^2+bx+1 = \lim_{x\to -1^-} 2bx^2+ax$$

$\Rightarrow a-b+1=2b-a$

$\Rightarrow \boxed{3b-2a=1}$ ---(1)

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b, & x>-1 \\ 4bx+a, & x<-1 \end{cases}$$

$f'_-(-1)=f'_+(-1)$

$\Rightarrow 2a(-1)+b=4b(-1)+a$

$\Rightarrow -2a+b=-4b+a$

$f(e) = \ln e = 1$

Ex: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(e+h) - 1}{h}$ ← (1) ← h

$f'(e) = \frac{1}{e} = e^{-1}$

$e + h = x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore$ then, $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(e+h) - 1}{h} = e^{-1}$

$f'(e) = \frac{1}{e} = e^{-1}$

Ex: $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^x - 4}{h^2 + 3h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^x - 4}{h(h+3)}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^x - 4}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+3}$

$\Rightarrow$ Let $x = (2+h)$. $\frac{1}{5}$

$\Rightarrow f(x) = x^x$

$\Rightarrow \ln f(x) = x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$

تابع ...

Ex: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - 0}{h}$ ← (1) ← h

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore$ then, $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - 0}{h} = 1$

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Ex: $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{21} - 1}{h}$

$f(x) = x^{21} \Rightarrow f'(x) = 21(x)^{20}$

$\Rightarrow f'(1) = 21(1)^{20} = 21$

$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (1+\ln x)$

$\Rightarrow f'(x) = x^x (1+\ln x)$

$\Rightarrow f'(2) = (2)^{(2)} \cdot (1+\ln 2)$

$= \boxed{4+\ln 2}$

$f(2) = 2^2 = 4$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^x - 4}{h} \cdot \dfrac{1}{3}$

$\Downarrow$

$(4+\ln 2)$

$\Rightarrow \boxed{(4+\ln 2)\cdot \frac{1}{3}}$ #

Exo- find $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-4}{2h^2-3h}$

if $f(2) = 4$

a) $-\frac{1}{3} f'(3)$ b) $\frac{1}{2} f'(3)$ c) $\frac{1}{4} f'(3)$

d) $\frac{1}{3} f'(3)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-4}{2h^2-3h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h(2h-3)}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-4}{2h^2-3h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h(2h-3)}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{2h-3}$

$\Downarrow$ $\qquad \Downarrow$

$f'(3) \qquad \frac{1}{2(0)-3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} f'(3)$

$\Rightarrow$ a) $-\frac{1}{3} f'(3)$ $\Leftarrow$

(*) **Ex:** $f(x+h) = 3x^3 h - 6x^2 h + h^2$

find $f'(1)$

$\Rightarrow f(x+h) - f(x) = 3x^3 h - 6x^2 h + h^2$

$\Rightarrow f(x+h) - f = h(3x^3 - 6x^2)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^3 - 6x^2$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^3 - 6x^2$ $\Leftarrow$

تابع...

$\Rightarrow f'(x) = 3x^3 - 6x^2$

$\Rightarrow f'(1) = 3(1)^3 - 6(1)^2 = -3$

Equation of tangent & perpendicular "normal" (line) "at $x=a$"

- slope of tangent $= f'(a)$
- slope of perpendicular $= \frac{-1}{f'(a)}$

- equation of tangent

$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{y} = f'(a)(x-a)$

- equation of perpendicular

$\Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

(*) If Line ① parallel (//) Line ②

Then: $m_1 = m_2$

$f'(a_1) = f'(a_2)$

Line ② normal (perpendicular) Line ①

Then $m_1 \times m_2 = -1$

$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Rightarrow f'(a) = \frac{-1}{f'(a_2)}$

* خطوات الحل:

(*) إيجاد معادلة المماس والعمودي

① نجد $(a, f(a))$

② نجد $f'(x)$ ونوض $f'(a) \leftarrow a$

③ $\text{tangent} \; y - f(a) = f'(a)(x-a)$

④ $\text{perpendicular} \; y - f(a) = \frac{-1}{f(a)}(x-a)$

مكتبة خواطر

⇒ ⊕ slope of tangent = $-\pi$

⊖ // // perpendicular = $\frac{1}{\pi}$

⊕ equation of tangent

$\Rightarrow y - y(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow y = -\pi(x-\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow y = -\pi x + \frac{\pi^2}{2}$

⊖ equation of perpendicular

$\Rightarrow y - y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{f'(\pi)}(x-\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{\pi}(x-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}}$

Ex:- $e^x + e^{2x}$ at $x = \ln 3$

$y = e^x + e^{2x}$

$\Rightarrow y(\ln e) = e^{\ln 3} + e^{2\ln 3}$

$\Rightarrow 3 + (3)^2 \Rightarrow 3+9 = \boxed{12}$

$y' = e^x + 2e^{2x} \Rightarrow y'(\ln 3)$

$= e^{\ln 3} + 2e^{2\ln 3} \Rightarrow 3 + 2(3)^2$

$\Rightarrow 3 + 2(9) = \boxed{21}$

⊛ في حالة تلامس إقترانين

نستنتج أنه عند نقطة التماس يكون

$f(a) = g(a)$

$\&\ f'(a) = g'(a)$

Ex:- find the equation of tangent ⊕ perpendicular @ slope

$y = x\sin(2x)$ at $x = \frac{\pi}{2}$

$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\sin(2\cdot\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cdot\sin\pi = 0$

$y' = 2x\cos(2x) + \sin(2x)$

$y'(\frac{\pi}{2}) = 2(\frac{\pi}{2})\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) + \sin(2\cdot\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \pi\cdot\cos(\pi) + \sin\pi = -\pi$

تابع... يا عزيزي...

⇒ ① at $(\sqrt{5}, 0)$

$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$

$\Rightarrow y'(\sqrt{5}, 0) = \frac{-\sqrt{5}}{0}$

⇒ slope of tangent = $-\infty$

⇒ equation of tangent

$\Rightarrow x = \sqrt{5}$

② at $(0, \sqrt{5})$

$y' = \frac{-x}{y} \quad y'(0, \sqrt{5}) = \frac{-0}{\sqrt{5}} = 0$

⊠ slope of tangent = ∞

equation of tangent ⇒ $y = \sqrt{5}$

⊠ ميل وخط مية مية ③

(Goooooooooooo... d)

⊠ slope of tangent = 21

⊠ slope of perpendicular = $\frac{-1}{21}$

⊠ equation of tangent

$\Rightarrow y - 12 = 21(x - \ln 3)$

⊠ equation of perpendicular

$\Rightarrow y - 12 = \frac{-1}{21}(x - \ln 3)$

○ (slope) في حالة طلع عندنا بخلي (slope) تكون المعادلة $y = f(a)$

في حال طلع عندنا الميل (slope) عبارة عن ○ تكون المعادلة $x = a$ ..

Ex:- $x^2 + y^2 = 5$, find the slope & equation of tangent for $(\sqrt{5}, 0)$ & $(0, \sqrt{5})$

ممكن بحكيلك السؤال أنه يقصد بالمماس الأفقي (horizontal tangent) يعني قيم "x" اللي ميلها يساوي صفر

بنجد المشتقة ونساويها بالصفر ومن ثم نجد قيم "x"

Ex Find all values of x at which the tangent line of the curve y horizontal

① $y = x^3 - 27x + 4$

$y' = 3x^2 - 27 \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x = \{x \pm 3\}$

② $y = x^4 e^x$

$\Rightarrow y' = 4x^3 e^x + x^4 e^x = 0$

$\Rightarrow e^x x^3 (4 + x) = 0$

$e^x \neq 0$ ، $x^3 = 0$ ، $x + 4 = 0$

$x = 0$ ، $x = -4$ $\Rightarrow x = \{0, -4\}$

③ $y = x + 2\cos x$, if $x \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow y' = 1 - 2\sin x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

لأن sin موجب فيهم

$x = \frac{\pi}{6}$ (ربع أول) , $\frac{5\pi}{6}$ (ربع ثاني)

④ $y = x - 2\cos x$

$y' = 1 + 2\sin x = 0$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

لأن sin سالب فيهم

$x = \frac{7\pi}{6}$ (ربع ثالث) , $\frac{11\pi}{6}$ (ربع رابع)

⑤ $y = \frac{x^2 - 3}{3x + 4}$ ⇒ قسمة

$\Rightarrow y' = \frac{(3x+4)\cdot 2x - (x^2 - 3)3}{(3x+4)^2} = 0$

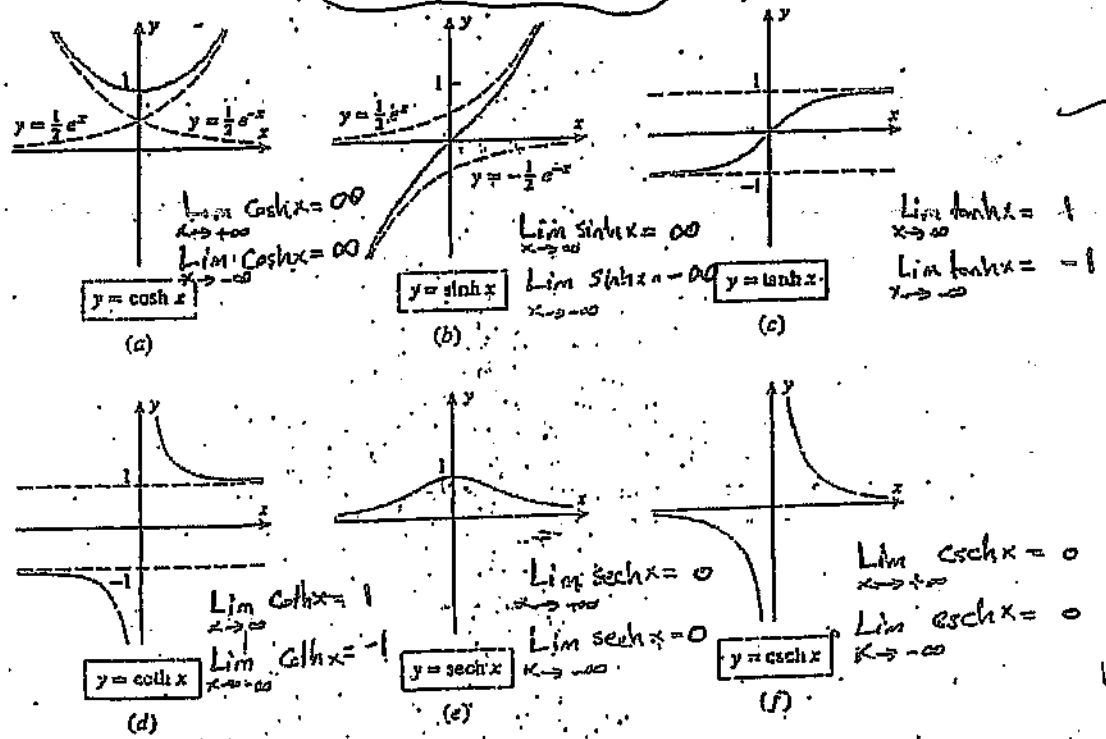
⇒ بتوخذ بس البسط وبتساويه بالصفر لأنه المقام إذا يساوي صفر بصير الناتج = لانهاية (∞)

6.9 Hyperbolic Functions

6.9.1 DEFINITION

Hyperbolic sine	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
Hyperbolic cosine	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
Hyperbolic tangent	$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Hyperbolic cotangent	$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
Hyperbolic secant	$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$
Hyperbolic cosecant	$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

* Remark:
① $\cosh x$, $\operatorname{sech} x$ → even
② $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{csch} x$ → odd
③ $\cosh x \geq 1$
④ $\sinh x$, $\operatorname{csch} x$, $\tanh x$, $\coth x$: +ve if $x > 0$, −ve if $x < 0$



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Figure 6.9.1

	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\coth x$	$\operatorname{sech} x$	$\operatorname{csch} x$
DOMAIN	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
RANGE	$[1, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$(0, 1]$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

مكتبة خواطر

Range $\tanh x$

$(-1, 1)$

6.9.3 THEOREM

$\frac{d}{dx}[\sinh u] = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$
$\frac{d}{dx}[\cosh u] = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$
$\frac{d}{dx}[\tanh u] = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$
$\frac{d}{dx}[\coth u] = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$
$\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$	$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$

6.9.2 THEOREM

$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$	$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sinh(-x) = -\sinh x$	$\cosh 2x = 2 \sinh^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1$

$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$

$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$

129

مكتبة خواطر

Hyperbolic-fuction

في أربع أسئلة:

1* sinh(a) = ?

2* sinh(x) = a ⇒ find x ?

3* equation find ?

4* derivative of Hyperbolic

1* sinh a = ?

* في هاي الحالة لازم تحفظ معادلة كل اقتران وبرهن

① sinh(o)

$\Rightarrow \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{e^{(o)} - e^{-(o)}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

② cosh(o) $\Rightarrow \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$\Rightarrow \frac{e^{(o)} + e^{-(o)}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

③ tanh(ln3) $\Rightarrow \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

$\Rightarrow \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}$

تابع ... ⑤

$6x^2 + 8x - 3x^2 + 9 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 8x + 9 = 0$

المميز $\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(a)}$ قانون

$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4(3)(9)}}{2(3)}$

$\Rightarrow \frac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{9-1}{3}}{\frac{9+1}{3}}$

$\Rightarrow \frac{8}{10}$

④ $\operatorname{sech}(\ln 5) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

$\Rightarrow \frac{2}{e^{\ln 5}+e^{-\ln 5}} \rightarrow \frac{2}{5+\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow \frac{2}{\frac{10+1}{5}} \Rightarrow \frac{2*5}{11} = \frac{10}{11}$

⑤ $\coth(2\ln x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

$\Rightarrow \frac{e^{2\ln x}+e^{-2\ln x}}{e^{2\ln x}-e^{-2\ln x}}$

$\Rightarrow \frac{x^{2}+x^{-2}}{x^{2}-x^{-2}}$

* ② المثالة

* $\sinh x = a$, find « All of the other Hyperbolics functions »

① If $\sinh x = \frac{3}{4}$, Then; find $\cosh x$, $\tanh x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$ $\coth x$.

* لازم تعرف متطابقة:-

$\cosh x$ يعني ، تحليل إلى $\cosh x$

يكون سالب أو أقل من واحد

ومتطابقة

$\cosh^{2} x - \sinh^{2} x = 1$

إذا كان $x>0$ ⇐ $\sinh(x)$ ⊕

إذا كان $x<0$ ⇐ $\sinh(x)$ ⊖

* يا ريتك إنت (Ln)

أنا (e) عشان نروح

مع بعض ..... ♡

الحبيبة ♡.....

② If $\sinh x = -3$, Then find all ?

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\Rightarrow \cosh^2 x - 9 = 1 \Rightarrow \cosh^2 x = 10$

$\Rightarrow \cosh x = \pm\sqrt{10}$ ✓ $+\sqrt{10}$ ✗ $-\sqrt{10}$

$\therefore \cosh x = +\sqrt{10}$

$\Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \coth x = \frac{-\sqrt{10}}{3}$

$\Rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \operatorname{csch} x = -\frac{1}{3}$

③ If $\operatorname{csch} x = -\frac{1}{4}$, find all ?

$\Rightarrow \sinh x = -4$

$\Rightarrow \cosh^2 x - (-4)^2 = 1 \Rightarrow \cosh x = \pm\sqrt{17}$

$\Rightarrow \tanh x = \frac{-4}{\sqrt{10}}$! ! $\coth x = \frac{-\sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{1}{\sqrt{17}}$ #

الحل

$\Rightarrow \cosh^2 x - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \cosh x = \frac{\pm 5}{4}$ ... $\cosh x = \frac{5}{4}$ ✓ ; $\cosh x = -\frac{5}{4}$ ✗

(*) لأن $\cosh(x) \geq 1$

$\Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow \frac{3}{5} = \tanh x$

$\Rightarrow \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{5}{3}$ #

③* مثالة *

equation

* لازم نرجع للمعادلة الأصلية أو نشتغل على متطابقات

① $\sinh x + \cosh x = 4$, find x ؟

⇒ متطابقة e^x

$\Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow \ln e^x = \ln 4$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln 4} \#$

② $\sinh x + \frac{e^{-x}}{2} = 3$

$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = 3$

$\Rightarrow \frac{e^x}{2} = 3 \Rightarrow e^x = 6$

$\Rightarrow \ln e^x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x = \ln 6}$

③ $\sinh x - \frac{e^x}{2} = -3$, find x ؟

$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2} = -3$

$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x} - e^x}{2} = -3$

$\Rightarrow \frac{-e^{-x}}{2} = -3 \Rightarrow e^{-x} = +6$

$\Rightarrow \ln e^{-x} = \ln 6 \Rightarrow -x = \ln 6$

$\Rightarrow x = -\ln 6 \Rightarrow x = \boxed{\ln \frac{1}{6}} \#$

④* **derivative:-**

find $\frac{dy}{dx}$

① $y = \cosh(5x-4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5\sinh(5x-4)$

② $y = \operatorname{sech}(x^5)$

$\frac{dy}{dx} = -5x^4 \operatorname{sech}(x^5) \cdot \tanh(x^5)$

③ $y = \log(\sinh x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x}{\sinh x \cdot \ln 10}$

④ $y = e^{\cosh(\ln x)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \sinh x \cdot e^{\cosh(\ln x)}$

$\Rightarrow \frac{\sinh x \cdot e^{\cosh(\ln x)}}{x}$

⑤ $y = \sqrt{4x + \sinh(e^x)}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 + e^x \cosh(e^x)}{2\sqrt{4x + \sinh(e^x)}}$

⑥ $y = (\coth(e^x))^{\sinh(x)}$

$\Rightarrow \ln y = \ln(\coth(e^x))^{\sinh(x)}$

$\Rightarrow \ln y = \sinh(x) \cdot \ln \coth(e^x)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \sinh(x) \cdot \left(\frac{-e^x \cdot \operatorname{csch}^2(e^x)}{\coth(e^x)}\right) + \cosh(x) \cdot \ln \coth(e^x)$

$\Rightarrow y' = y\left(\frac{-\sinh x \cdot e^x \cdot \operatorname{csch}^2(e^x)}{\coth(e^x)} + \cosh(x) \cdot \ln \coth(e^x)\right)$

$\Rightarrow y' = (\coth(e^x))^{\sinh x} \cdot \left(\frac{-e^x \cdot \sinh x \cdot \operatorname{csch}^2 e^x}{\coth(e^x)} + \cosh x \cdot \ln \coth\right)$

Application of Differentable

تطبيقات على الإشتقاق.

[A] critical point.

النقاط الحرجة. داخل f(x) ⇒ Domain

② critical point ← f'(x) → f'(x) = 0 → find x
f'(x) = d.n.e

③ « أهم نقطة تنتمي لـ x في المجال » ⇐ سميناها أطراف المترة critical
بشرط أن تكون ضمن فترة مغلقة.

Ex:-① The function
$f(x) = x^3 - 3x^2$, find C.P ?

⇒ Dom f(x) = IR

⇒ نشتق f'(x) = $3x^2 - 6x$

⇒ $x(3x-6) = 0$

$x = 0$ ∈ / $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ∈

Exe-② Find the C.P of
function, $f(x) = x^3 - 3x^2$ [1,4]

① Dom f(x) ⇒ IR ∩ [1,4] ⇒ [1,4]

نشتق ⇒ f'(x) = $3x^2 - 6x$

⇒ $3x^2 - 6x = 0$ ⇢ $x = 0 \notin$ Dom x

$x(3x-6) = 0$ ⇢ $x = 2 \in$ Dom ✓

⇢ $x = 1$] ⇒ أطراف مغلقة
$x = 4$]

*

Exe-③ $f(x) = \frac{1}{x}$, find C.P ?

⇒ Dom f(x) ⇒ IR − {0}

⇒ $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 0$

⇒ $x = 0 \notin$ Domain

∴ f(x) not has C.P of f(x)

مكتبة خواطر

(B) Increase and decrease

* التزايد و التناقص

① نعين C.P على هذا الأساس

② نختبر $f'(x)$ من حيث تعويض عدد بـ $f'(x)$

③ إذا كان ناتج التعويض موجب ← ++++ ناتج التعويض موجب

ناتج التعويض سالب ← ----

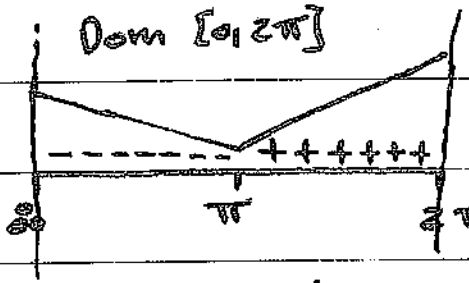
④ بعض الأشكال:

* Dom $\Rightarrow \mathbb{R}$

decrease $(-\infty, 1)$, C.P $\Rightarrow x=1$

Increase $(1, \infty)$,

* Dom $[0, 2\pi]$



d.c $(0, \pi)$, C.P $\Rightarrow x=\pi$

In $(\pi, 2\pi)$, $x=0$

$x=2\pi$

Ex: ④ find the C.P of

$f(x) = x\sqrt{x-1}$?

$\Rightarrow$ Dom $\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1, \infty)$

نشتق $\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} \cdot \frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

$\Rightarrow \frac{x + 2x - 2}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin$ Dom

$2\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1 \in$ Dom

$\therefore \boxed{x=1}$

Ex: ⑤ $f(x) = x + \sin x$

$x \in (0, 2\pi)$, find C.P ?

$\Rightarrow$ Dom $\mathbb{R} \cap (0, 2\pi) \Rightarrow (0, 2\pi)$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x = \pi}$

مكتبة خواطر

(*)

++++++++++++++

$\frac{\pi}{2}$

Domain IR

I.e IR / C.P $x=\frac{\pi}{2}$

(*)

---------- 5 ----------

Dom ⇒ R-{5}

d.c ⇒ $(-\infty,5)\cup(5,\infty)$ C.P

C) extrema point ((ex.p))

C.p ← ex.p كل

عكس العكس ليس

"فطوات كل"

① نعين d.c , I.c نعوض الأعداد

② extrema

relative (local)

min max

absolute

ممكن يكون أوف

min

max

فترة لازم

لازم اتكون

مقبول يكون

فوق فترة لازم فيها

أعلى قيمة أقل

$(a, f(a))$

يعني a بدها إنتبه

$f'(x)$ ←

أعلى أو أقل قيمة

min max

(*) Dom ⇒ IR

------ ++++++

(1,-2) ← local min & absolute

(*)

+++++ -----

(0,5) ← local max & absolute.

⇒ I.C ⇒ $(-\infty,-2) \cup (0,3) \cup (4,7)$

⇒ d.C ⇒ $(-2,0) \cup (3,4)$

⇒ C.P ⇒ $X = \{-2, 0, 3, 4, 7\}$

⇒ local min ⇒ $(0,1), (4,2)$

⇒ local max ⇒ $(-2,3), (3,7)$

⇒ absolute min ⇒ not has absolute min

⇒ absolute max ⇒ $(7,10)$

Concavity & inflection

① Dom f(x)

② $f''(x) = (0, d.n.e)$

③ نعين على هذه الأعداد ونختبر الإشارة

④ $f''(x) \to \oplus \Rightarrow \overset{\cup}{+++}$ concave up

$f''(x) \to \ominus \Rightarrow \overset{\cap}{---}$ concave down

⑤ inflection point ⇒ ① تنتمي للمجال

② تغير إشارة f''

③ يكون $f(x)$ معرف عندها.

(0,3) (5,2) $(2\pi, 4)$

⇒ local min (5,2)

⇒ absolute min (5,2)

⇒ absolute max $(2\pi, 4)$

Dom $\mathbb{R} - \{4\}$

4

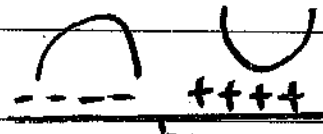
⇒ not has local & absolute

min absolute عند $(-\infty)$ لأنه صفر

-2 0 3 4

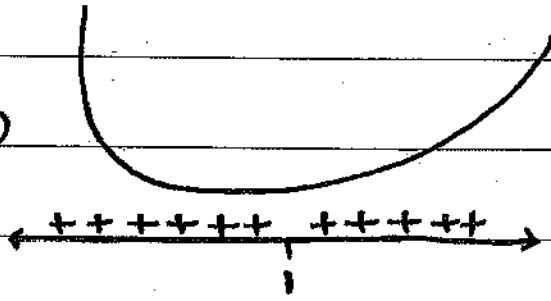
⇒ $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$

$f(3) = 7$, $f(4) = 2$, $f(7) = 10$



→ inflection point

$(a, f(a))$



(not inflection ! concave up)

Ex:- $f(x) = x^3 + 3x^2$, find

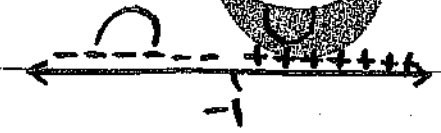
C. up, down, inflection point

⇒ Dom ⇒ IR

⇒ $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6 = 0$ ⇒ $\boxed{x = -1}$



⇒ concave down $(-\infty, -1)$

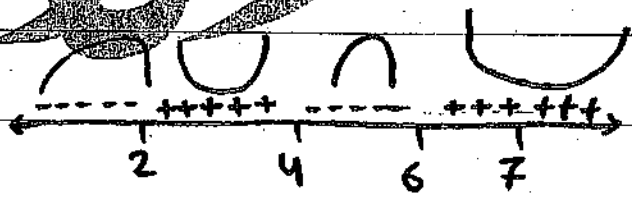
⇒ concave up $(-1, \infty)$

⇒ inflection point

$(-1, f(-1)) \Rightarrow (-1, 2)$

⇒ concave down $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

has not inflection point.



⇒ concave up ⇒ $(2,4) \cup (6, \infty)$

⇒ concave down ⇒ $(-\infty, 2) \cup (4, 6)$

⇒ inflection point ⇒ $(2,4), (4, -2), (6, 5)$

E # إيجاد المجاهيل

$\Rightarrow f'(x) = 2ax - b \Rightarrow 2a(2) - b = 0$

$\Rightarrow \boxed{4a - b = 0}$ ②

معادلتين بمجهولين «حل لا تعويض»

$\Rightarrow \boxed{b = 4a}$

$\Rightarrow 4a - 2(4a) = 4$

$\Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$\Rightarrow \boxed{b = -4}$ #

① إن ذكر في السؤال relative extrema, critical, local

يكون المشتقة الأولى تساوي صفر.

$f'(x) = 0$

② إن ذكر في السؤال inflection

يكون المشتقة الثانية = 0

$\Rightarrow f''(x) = 0$

$I(a, f(a))$ نقطة انعطاف إذا كان

$f(a)$ يساوي f عند a وتغير إشارة f'' حول a

Ex: find all for $f(x)$

① $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

$\Rightarrow Dom\ f(x) \Rightarrow R - \{\pm 1\}$

$\Rightarrow f'(x) \Rightarrow \frac{(x^2-1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \therefore f'(x) = 0$

$\Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \in Dom$

$\Rightarrow f'(x) = d.n.e \Rightarrow (x^2-1)^2 = 0$

$x = \pm 1 \notin Dom \Rightarrow$

Ex:- find the constant (a, b) for $f(x) = ax^2 - bx$ such that $(2, 4)$ extrema point

$\Rightarrow f(2) = 4 \Rightarrow a(2)^2 - 2b = 4$

$\Rightarrow \boxed{4a - 2b = 4}$ ①

$\Rightarrow f''(x) = \infty$

$\Rightarrow 6x^2 + 2 \neq \infty$ عدد حقيقي

$f''(x) = d.n.e$

$(x^2-1)^3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \notin Dom$

Concave up $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Concave down $(-1, 1)$

$f(x)$ not has inflection point.

② $f(x) = \sin x - \cos x \ , [0, \pi]$

$\Rightarrow Dom\ R \cap [0, \pi] \Rightarrow [0, \pi]$

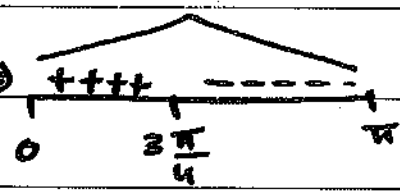
$\Rightarrow f'(x) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0$

$\Rightarrow -\cos x = \sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -1$

$\Rightarrow \tan x = -1$

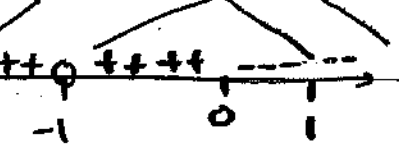
$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$



$\Rightarrow \infty$ Then critical point

$(0, f(0)) = (0, 0)$

$\Rightarrow f'(x) \Rightarrow$



increasing $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

decreasing $(0, 1) \cup (1, \infty)$

$\Rightarrow$ not ~~local~~ absolute min

absolute max ~~local~~

local min at $x = 0$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2-1)^2(-2) + 2x \cdot \ldots}{(x^2-1)^4}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{2[(x^2-1) - (x^2-1) + 4x^2]}{(x^2-1)^4}$

بعد مشتق

$\Rightarrow f''(x) = \frac{2[4x^2 - x^2 + 1]}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

⇒ increase $(0, \frac{3\pi}{4})$

⇒ decrease $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$

⇒ max absolute & local $(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2})$

← Then critical point

$(\frac{3\pi}{4}, f(\frac{3\pi}{4})) = (\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2})$

$(0, f(0)) = (0, -1)$

أطراف فترة $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 1)$

⇒ min absolute $(0, -1)$

⇒ not has min local.

⇒ $f''(x) = -\sin x + \cos x$

⇒ $f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x + \cos x = 0$

⇒ $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

⇒ $x = \frac{\pi}{4}$

⇒ $f''(x)$ | ++++++ | ------ |

0 $\frac{\pi}{4}$ π

concave up $(0, \frac{\pi}{4})$

concave down $(\frac{\pi}{4}, \pi)$

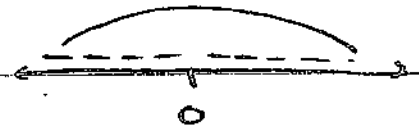
inflection point $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4})) = (\frac{\pi}{4}, 0)$

$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-4/3}$

⇒ $\frac{-2}{9x^{4/3}} \Rightarrow \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $f''(x) \neq 0$

$f''(x) =$ d.n.e

⇒ $9\sqrt[3]{x^4} = 0 \Rightarrow x = 0$



concave down IR

not has inflection point

⑤ $f(x) = xe^{-x}$

⇒ D ⇒ IR

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = 0$

$e^{-x}(-x + 1) = 0 \Rightarrow e^{-x} \neq 0$

⇒ $(-x + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

⇒ + + + + + | - - - - -

1

increase $(-\infty, 1)$

decrease $(1, \infty)$

local & absolute max $(1, f(1)) = (1, e^{-1})$

إذا كانت المشتقة الأولى عند النقطة (c) = 0

المشتقة الثانية عند النقطة (c) أكبر من الصفر | المشتقة الثانية عند النقطة (c) أصغر من الصفر

تكون النقطة (c) صغرى محلية. | تكون النقطة (c) عظمى محلية.

ملاحظة: (c) صغرى محلية ← أكبر من الصفر

(c) عظمى محلية ← أصغر من الصفر

Ex:- $f(x)=4x^3-48x+4$

find local extrema point by using the second derivative test.

$\Rightarrow f'(x)=12x^2-48=0$

$\Rightarrow 12(x^2-4)=0 \Rightarrow x=\{\pm 2\}$

$\Rightarrow f''(x)=24x \Rightarrow$

$f''(2)=48>0 \rightarrow$ min local

$f''(-2)=-48<0$ max local.

$f''(x)=-2e^{-x}+xe^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x}(-2+x)=0$

$\Rightarrow e^{-x}\neq 0 \ / \ -2+x=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$\cap$ (concave down) | $\cup$ (concave up)

$---- \ 2 \ ++++$

- concave down $(-\infty, 2)$
- concave up $(2, \infty)$
- inflection point $(2, f(2)) = (2, 2e^{-2})$

The second derivative test

اختبار المشتقة الثانية.

Suppose $f''(x)$ is cont near c

① $f'(c)=0$ & $f''(c)>0$ then f has local min at c

② $f'(c)=0$ & $f''(c)<0$ then f has local max at c

[7]

الفصل الثاني: النهايات

(2) قاعدة لوبيتال: هاي بنال كالتولي الجزء الأول

(*) If $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'}{g'}$

Ex:-

① $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1$ (نشتق)

#Engine_team

"لكل مجتهد نصيب"

② $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \frac{0}{0}$ ⇐ نشتق مرة أخرى

(نشتق)

ملاحظة: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{0}{0}$ نشتق مرة أخرى ⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

ملاحظة: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

③ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{\ln(3x+4)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1} \frac{2x}{\frac{3}{3x+4}} = \boxed{\frac{-2}{3}}$

ملاحظة: $\ln 1 = 0$

④ $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to \infty} \frac{\lim 1}{\lim e^x} = \frac{\lim 1}{\infty} = \underline{\text{Zero}}$

(نشتق)

⑤ $\lim_{x\to \infty^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق ⇒ $\lim_{x\to \infty^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{1}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to \infty^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} =$

⑥ $\lim_{x\to \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{1 + \ln x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty}{1} = \boxed{\infty}$

(نشتق)

(144)

مكتبة خواطر

2

(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{4x^3+2} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2}{12x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{24x} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4}}$

A B

(*) 2 $\lim f(x) = [0\cdot\infty]$ or $[\infty-\infty]$

الحالة الثانية

* إذا كان ناتج التعويض عبارة عن $[0\cdot\infty]$ أو $[\infty-\infty]$ عندها نلزم إذا نريد حل السؤال حيث يعبر ناتج التعويض عبارة عن $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ فيكون حل كالتالي: بأحد الأمرين إلى القوانين إلى الطريقة كما يلي:

(A) $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ أو $0\cdot\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

(B) $\infty-\infty$ → فرق مربعات / توحيد مقامات ⟹ $\lim_{x\to\infty}$ نقوم بحلها كما في الحالة السابقة

→ نقوم بحلها كما في (A)

(*) Ex $\lim_{x\to\infty} x e^{-x} \Rightarrow \infty\cdot e^{-\infty} = \infty\cdot 0 \Rightarrow$ الحالة الثانية

نحلها على صورة (A) كما يلي:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{ex} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$ #

3

Ex $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty$

نحولها إلى صورة (A)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x$ بالتعويض $\Rightarrow$ Zero

Ex $\lim_{x\to\infty} \left(x \sin\frac{\pi}{x}\right) = \infty \cdot \sin(0) = \infty \cdot 0$

نحولها لـ
صورة (A)

بالتعويض $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

(*) لا تنسى تعويض إطار كل عبارة
عن $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ عندما تشتق كعنصر

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}}$

$\cos(0)=1$ ، $\frac{\pi}{\infty} = 0^0$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \pi \cos\frac{\pi}{x} = \pi(1) = \boxed{\pi}$

لأن (π) عبارة عن ثابت

Ex $\lim_{x\to\infty} \left(\ln x - \ln(x+1)\right) = \infty - \infty$

نحولها لـ الصورة (B)
باستخدام خاصية الـ $(\ln)$ الموجبة.

$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

* ملاحظة: $\lim \ln(x) = \ln(\lim x)$

$\Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$ بالتعويض $\Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ نشتق

$\ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1}\right) \Rightarrow \ln(1) = \boxed{0^0}$ #

146

مكتبة خواطر

4

الحالة الثالثة

1^{∞} ، 0^{0} ، ∞^{0} :- التي يكون ناتج التعويض

يحل بالخطوات التالية :-

① نفرض طرف الأول = y (Lim)

« طرف النهاية »

② نأخذ (Ln) للطرفين ونستخدم قاعدة

$$\text{Ln } a^{b} = b \text{ Ln } a$$

③ نجد النهاية $\text{Lim}(\text{Ln } y)$ = ناتج النهائي .

أي أن الجواب النهائي يكون عبارة عن $e^{(\text{الجواب النهائي})}$

* قواعد هامة :-

$$\text{Lim}_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab} \quad (1)$$

$$\text{Lim}_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab} \quad (2)$$

تطبيق جاهز .

Ex :- $\text{Lim}_{x \to 0^{+}} x^{\sin x} = 0^{0}$

الحل

نفرض $y = x^{\sin x}$

$\text{Ln } y = \text{Ln } x^{\sin x}$

$\text{Ln } y = \sin(x) \text{ Ln } x$

$\text{Lim}_{x \to 0^{+}} \sin(x) \text{Ln } x \Rightarrow$ ناتج التعويض $0 \cdot \infty$

نحولها على الصورة (A) الموضحة بالإشتقاق

$\text{Lim}_{x \to 0^{+}} \dfrac{\text{Ln } x}{\frac{1}{\sin(x)}} \Rightarrow \dfrac{\infty}{\infty}$

$\text{Lim}_{x \to 0^{+}} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1 \cdot \cos(x)}{\sin^{2}(x)}} \Rightarrow \text{Lim}_{x \to 0^{+}} \dfrac{\sin(x) \cdot \sin(x)}{-x \cdot \cos(x)}$

$= -1 \cdot 0 = 0$

$e^{0} = 1$

5

#Engine_team.

Ex $\lim_{x\to\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \infty^0$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق مرة أخرى

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2} = \boxed{2}$ الجواب $e^{(2)}$ #

نشتق مرة أخرى

Ex $\lim_{x\to\infty^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}$

$y = (\sin(x))^{\frac{3}{\ln x}}$ نفرض

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln\sin x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$ نشتق

نطبق ln على الطرفين $\ln y = \ln \sin(x)^{\frac{3}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{\ln x} \ln \sin(x)$

نشتق الطرف

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3 * \cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{3x * \cos(x)}{\sin(x)}$

نوزع النهايات.

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sin(x)} * \lim_{x\to\infty} \cos(x) \Rightarrow 3(1) = \boxed{3} \mid e^{(3)}$ #

مكتبة خواطر

b ①

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(ax)}{xb} = \lim_{x\to\infty} \frac{bx}{\sin(ax)} = \lim_{x\to\infty} \frac{bx}{\tan(ax)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\tan(ax)}{bx}$$

نوجد النهاية

$\frac{a}{b}$

نوجد النهاية

$\frac{b}{a}$

نوجد النهاية

$\frac{b}{a}$

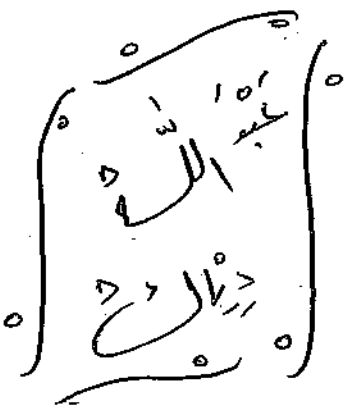
نوجد النهاية

$\frac{a}{b}$

أوكلم الطالب

شرح لو بسرعة ((٧ H))

« أيمن الزيود »



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{x(-\sin x + \cos x) + \cos x} = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

مثال خاصة

$$\lim_{x\to\infty} (5^x - 2^x) \quad \infty - \infty$$

بنسحب الأكبر عامل مشترك 5^x

$$= \lim_{x\to\infty} 5^x \left(1 - \frac{2^x}{5^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} 5^x \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)$$

$$= 5^\infty \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^\infty\right)$$

$$= \infty(1-0) = \infty$$

أمثلة زيادة على L'H

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sec 3x \cos 5x$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \quad \frac{0}{0} \text{ L'H}$$

$$\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x} = \frac{-5(1)}{-3(-1)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x\sin x} \quad \frac{0}{0} \text{ L'H}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{(x\cos x + \sin x)} \quad \frac{0}{0} \text{ L'H}$$

من ثانية

Ex $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

L'H $\frac{1-1}{1-1} = \boxed{\frac{0}{0}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{5^x \ln 5 - 4^x \ln 4}{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2} =$

$\frac{\ln 5 - \ln 4}{\ln 3 - \ln 2}$

Ex $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{3x}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+2}{x}}\right)^{3x}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^{3x} = \frac{\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^{3x}}{\lim_{x\to\infty} (1+\frac{2}{x})^{3x}}$

$= \frac{^3e}{e^6} = \boxed{e^{-3}}$

Ex $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(\sqrt[x]{x})$

$= \tan^{-1}(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}})$ $\overset{\infty^0}{\underline{\text{L'H}}}$

$Y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln Y = \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}$

$\Rightarrow e^0 = 1$

$\Rightarrow \tan^{-1}(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

$\lim_{x\to\infty} (e^x+\pi)^{\frac{1}{x}}$ ∞^0 ل'ه

$y=(e^x+\pi^x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln y = \frac{\ln(e^x+\pi^x)}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+\pi^x)}{x} \overset{\infty}{=} \overset{ل'ه}{=}$

$\frac{e^x+\pi^x\ln\pi}{e^x+\pi^x}$

$\frac{}{1}$

$= \frac{e^x+\pi^x\ln\pi}{e^x+\pi^x} = \frac{\pi^x((\frac{e}{\pi})^x\ln\pi)}{\pi^x((\frac{e}{\pi})^x+1)}$

$\frac{((\frac{e}{\pi})^\infty+\ln\pi)}{(\frac{e}{\pi})^\infty+1}$ $e<\pi$ 2.71 3.14

$\frac{e+\ln\pi}{e+1} = \boxed{\ln\pi}$

ما تقسى انه جواب ١٨٧

$\Rightarrow \frac{\ln\pi}{e} = \boxed{\pi}$ ح

Mean - value - thm (M.V.T)

Def :- for $y=f(x)$ on $[a,b]$ if

① f cont on $[a,b]$

② f' exist on (a,b)

Then ∃ at least $c \in (a,b)$ such that $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remark :- if $f(b)=f(a)$ then Thm called Rolle's thm / $f'(c)=0$

Ex :- find all number c that satisfy Rolle's thm

$f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $x \in [1,3]$

$\Rightarrow f(x)$ cont on $[1,3]$

$f'(x)$ exist on $(1,3)$

$f'(c)=0$ ∴ $f'(x) = -12+6x$

$f'(c) = -12+6(c) = 0$

$c=2$

Exe- $f(x)= x^2-x$, find all number of c that satisfy the inclusion of M.V.T on $[2,5]$

$\Rightarrow f(x)$ cont on $[2,5]$

$f'(x)$ exist on $(2,5)$

$\Rightarrow f(2)=2$, $f(5)=20$

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$\Rightarrow \frac{20-2}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$\Rightarrow f(c)=6 \Rightarrow 2x-1 \Rightarrow f'(c)=2c-1$

$\Rightarrow 2c-1=6 \Rightarrow \boxed{c=\frac{7}{2}}$

Integration

"التكامل"

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a:- الحد السفلي / b:- الحد العلوي

f(x):- الاقتران الذي يريد إيجاد تكاملة / dx:- المتغير الذي يتم التكامل بالنسبة له

* $\int_a^b z \cdot f(x)\,dx$ / $\int_a^b z \cdot f(x)\,dz$ ← ثابت — الاقتران، الاقتران

* Rules of Integration.

1. $\int 1\,dx = x + c$
2. $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ r \neq -1$
3. $\int_a^b x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\Big]_a^b \Rightarrow \frac{(b)^{r+1}}{r+1} - \frac{(a)^{r+1}}{r+1}$

الحد العلوي ناقص الحد السفلي

* $\int_1^2 5x^4\,dx \Rightarrow \frac{5x^5}{5}\Big]_1^2$

$\Rightarrow (2)^5 - (1)^5 \Rightarrow 32 - 1 = 31$

* $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int_1^2 x^{-1/2}\,dx$

$\Rightarrow 2x^{1/2}\Big]_1^2 \Rightarrow 2\sqrt{x}\Big]_1^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} \Rightarrow 2\sqrt{2} - 2$

4. $\int (ax+b)^r\,dx \Rightarrow \frac{(ax+b)^{(r+1)}}{a(r+1)} + c$

Ex $\int (3x+4)^2\,dx \Rightarrow \frac{(3x+4)^3}{3*3} + c$

$\Rightarrow \frac{(3x+4)^3}{9} + c$

integration

$\int \cos(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

$\int \sin(ax+b)\,dx \longrightarrow -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

$\int \sec^2(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

$\int \csc^2(ax+b)\,dx \longrightarrow -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\sec(ax+b)+C$

$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b) \longrightarrow -\frac{1}{a}\csc(ax+b)+C$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\csc\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

$\Rightarrow -2\csc\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

- $\int (f \pm g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

trig (اقتران مثلثي)

الزاوية.

$\int \cos(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

$\int \sin(ax+b)\,dx \longrightarrow -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

$\int \sec^2(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

$\int \csc^2(ax+b)\,dx \longrightarrow -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\sec(ax+b)+C$

$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b) \longrightarrow -\frac{1}{a}\csc(ax+b)+C$

Ex: $-\int \sin(2x+1)\,dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$

Ex: $-\int \csc\left(\frac{x+1}{2}\right)\cot\left(\frac{x+1}{2}\right)dx$

$\Rightarrow \int \csc\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx$

اركي

* ملاحظة: باستخدام إذا مربع زاوية بعد بضرب كل الزوايا بنفس العدد.

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\Rightarrow \sin^2(3x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(6x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\Rightarrow \sin(8x) = 2\sin(4x)\cos(4x)$

$\int \cos^2(4x)\cdot dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8x)\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$

$\Rightarrow \int \frac{3}{1+\cos x}\,dx \Rightarrow \int \frac{3}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\int \sec^2(\frac{x}{2})\cdot dx$ ($\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, $2\cos^2(\frac{x}{2}) = 1+\cos(x)$)

$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 2\tan(\frac{x}{2})$

$\Rightarrow \boxed{3\tan(\frac{x}{2}) + C}$

Ex $\int \tan^2 x \cdot dx$

$\Rightarrow \int (\sec^2 x - 1)\cdot dx$

$\Rightarrow \int \sec^2(x)\cdot dx - \int 1\cdot dx$

$\Rightarrow \tan x - x + C$

Ex $\int \cot^2 x \cdot dx$

$\Rightarrow \int (\csc^2 x - 1)\cdot dx$

$\Rightarrow \int \csc^2 x \cdot dx - \int 1\cdot dx$

$\Rightarrow -\cot x - x + C$

Ex $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\cdot dx$

$\Rightarrow \int \frac{2\sin x \cos x}{\cos x}\cdot dx$

$\Rightarrow 2\int \sin x \cdot dx = \boxed{-2\cos x + C}$

Ex $-\int 2\sin x \cdot \cos x \cdot dx$ (كما)

$\Rightarrow \int \sin(2x)\cdot dx = \boxed{\frac{-\cos(2x)}{2} + C}$

ملاحظة:
إذا كان التكامل هو ناتج أكثر من بند فإنه يفصل بينهم بجمع أو طرح كالتالي:

Ex:- $\int \frac{2\csc x - \sin x}{\sin x} \cdot dx$

$\Rightarrow \int \frac{2\csc}{\sin x} \cdot dx - \int \frac{\sin x}{\sin x} \cdot dx$

$\Rightarrow 2\int \csc^2(x) \cdot dx - \int dx$

$\Rightarrow -2\cot x - x + C$

Properties of limit

① $\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$

② $\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$

③ $\int_{-a}^{a} \text{odd function} = 0$

④ $\int_{-a}^{a} \text{even function} = 2\int_{0}^{a} \text{even function}$

⑤ $\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$

⑥ $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x) \cdot dx$

Ex:- $\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{x^4+x^2} \cdot dx$

$\Rightarrow \frac{\sin(-x)}{(-x)^4+(-x)^2} = -\left(\frac{\sin(x)}{x^4+x^2}\right)$ odd function

$\therefore = 0$

مثال شامل على كل ما سبق:

If $\int_1^2 3f(x) \cdot dx = 6$ &
$\int_3^2 5 - f(x) \cdot dx = 4$
Then:- find $\int_1^3 f(x) \cdot dx$

$\Rightarrow \int_1^2 3f(x)\,dx = 6$

$\Rightarrow 3\int_1^2 f(x)\,dx = 6$

$\Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = 2$

$\Rightarrow \int_2^2 5 - f(x)\,dx = 4$

$\Rightarrow \int_3^2 5\,dx - \int_3^2 f(x)\,dx = 4$

$\Rightarrow 5(2-3) - \int_3^2 f(x)\,dx = 4$

$\Rightarrow -5 - \int_3^2 f(x)\,dx = 4$

$\Rightarrow -\int_3^2 f(x)\,dx = 9 \Rightarrow \int_2^3 f(x)\,dx = 9$

⑥ فاصيلة رقم

$\Rightarrow \int_1^3 f(x) = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x)\,dx$

$\Rightarrow 2 + 9 = \boxed{11}$

⑤ $\int b^{(ax+b)}\,dx$

$= \frac{b^{(ax+b)}}{a \cdot \ln b} + C$

Ex: $\int 2^{(3x+1)}\,dx$

$\Rightarrow \frac{2^{(3x+1)}}{3 \cdot \ln 2} + C$

⑦ $\int e^{(ax+b)}\,dx = \frac{e^{(ax+b)}}{a} + C$

Ex: $\int e^{5x-2}\,dx$

$\Rightarrow \frac{e^{(5x-2)}}{5} + C$

⑧ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Ex: $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)}{1+\sin(2x)}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\ln|1+\sin(2x)| + C}$

* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Exe- $\int \tan x \cdot dx$

$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$

$\Rightarrow -\int \frac{-\sin x}{\cos(x)} \cdot dx \Rightarrow -Ln|\cos x| + c$

Ex3- $\int \cot(x) \cdot dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$

$\Rightarrow Ln|\sin x| + C$

Ex- $\int (Ln e^t + Ln e^x) \cdot dx$

$\Rightarrow \int (x Ln e - x Ln e) \cdot dx$

$\Rightarrow \int 0 \cdot dx = 0$

ملاحظة

② وصفات كاهولا

⊛ $\int \sec x \cdot dx = Ln|\sec x + \tan x| + c$

لهي بيقه بكل بضرب $(\sec x + \tan x)$ بالبسط والمقام.

⊛ $\int \csc \cdot dx = -Ln|\csc x + \cot x| + c$

لهي بيقه بكل بضرب $(\csc x + \cot x)$ بالبسط والمقام.

⊛ $\int \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2} \cdot dx = \tan^{-1}(g(x)) + c$

⊛ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

⊛ $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \cdot dx = \sin^{-1}(g(x)) + c$

⊛ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

⊛ $\int \frac{g'(x)}{g(x)\sqrt{g^2(x)-1}} \cdot dx = \sec^{-1}(|g(x)|) + c$

⊛ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\left|\frac{x}{a}\right|\right)$

Exe- $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} \cdot dx$

$x^2+1 \overline{)\, x^3+x+1}$; $\frac{x}{-x^3-x}$; 1

$\Rightarrow \frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$

$\Rightarrow \int x \cdot dx + \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \tan^{-1}(x) + c$

Ex:- $\int \frac{1}{16+x^2}\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$

$\int \frac{1}{1+9x^2}\cdot dx \Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\tan^{-1}(3x)+C$

Ex:- $\int \frac{1}{9+4x^2}\cdot dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{4\left(\frac{9}{4}+x^2\right)}\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{9}{4}+x^2}\cdot dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

$\Rightarrow \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

Ex $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\cdot dx$

$\Rightarrow -\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,dx$

$\Rightarrow \boxed{-\sin^{-1}(e^{-x})+C}$

Ex:- $\int \frac{3\sec^2 x\cdot dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

$\Rightarrow 3\int \frac{\sec^2 x\cdot dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \boxed{3\cdot\sin^{-1}(\tan x)+C}$

Ex:- $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

$\Rightarrow 3\int \frac{x^{-1}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}\cdot dx$

$\Rightarrow \boxed{3\sin^{-1}(\ln x)+C}$

Ex:- $\int \frac{5}{x\sqrt{x^2-3}}\cdot dx$

$\Rightarrow 5\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-3}}\cdot dx \Rightarrow \boxed{\frac{5}{\sqrt{3}}\sec^{-1}\left(\frac{|x|}{\sqrt{3}}\right)+C}$

Integration by substitution

$\int_1^2 x\cos(x^2+1)\,dx$

في حال كان التكامل محدود

$\Rightarrow u = x^2+1$

$x \to 1 \longrightarrow u \Rightarrow 2$

$x \to 2 \longrightarrow u \to 5$

Ex $\int \frac{dx}{x\ln x}$

① $\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx$

② $x\,du = dx$

③ $\int \frac{x\,du}{x\,u} \Rightarrow \ln|u| + c$

④ $\ln|\ln x| + c$ #

Ex $\int \frac{\ln x}{x}\cdot dx$

$\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot dx$

$\Rightarrow du\cdot x = dx$

$\Rightarrow \int \frac{u}{x}\cdot du\cdot x = \int u\cdot du$

$\Rightarrow \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

① دائماً إذا في $\ln x$ جالبلك بفرض $u = \ln x$

② بفرض الزاوية $u =$ trig (ليس مقلوبي)

③ ليس مقلوبي بفرض الأس $u =$

④ ليس مقلوبي $\Rightarrow$ بفرض $u = f$ داخل.

⑤ مشتقة اللي فالمينة موجودة بطول أكيد

① بفرض u الإقوان اللي ومشتقته موجودة

② بخلي dx موضع القانون.

③ نعوض في كل التكامل.

④ في حال كان التكامل غير محدود لازم نرجع المفروض.

مكتبة خواطر

Ex :- $\int 5x^4 e^{x^5} . dx$

$\Rightarrow u = x^5 \Rightarrow du = 5x^4 . dx$

$\Rightarrow \frac{du}{5x^4} = dx$

$\Rightarrow \int 5x^4 e^u . \frac{du}{5x^4}$

$\Rightarrow \int e^u . du \Rightarrow e^u + c$

$\Rightarrow \boxed{e^{(x^5)} + c}$

Ex :- $\int \frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}}}{x^2} . dx$

$\Rightarrow u = \sqrt{4-\frac{1}{x}} \Rightarrow u^2 = 4 - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 2u\,du \cdot x^2 = dx$

$\Rightarrow \int u . 2u . x^2 . du$

$\Rightarrow \int 2u^2 . du \Rightarrow \frac{2}{3} u^3 + c$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right)^3 + c$

$\int x^2 \cos(3x^3) . dx$

$\Rightarrow u = 3x^3$

$\Rightarrow \frac{du}{9x^2} = dx$

$\Rightarrow \int x^2 . \cos u . \frac{du}{9x^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{9} \int \cos u . du \Rightarrow \frac{1}{9} \sin(u) + c$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{9} \sin(3x^3) + c}$

Ex :- If $\int_1^5 f(x)\,dx = 20$

Then :- find $\int_0^2 3x\, f(x^2+1) . dx$

$\Rightarrow \int_0^2 3x\, f(x^2+1) . dx$

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x . dx$

$\Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$

$x \to 0 \dashrightarrow u = (0)^2 + 1 = 1$

$x \to 2 \dashrightarrow u = (2)^2 + 1 = 5$

$\Rightarrow \int_1^5 3x\, f(u) . \frac{du}{2x} = \frac{3}{2} \int_1^5 f(u) . du$

Hyp. integration.

$\int \cosh(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}\sinh(ax+b)+c$
$\int \sinh(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}\cosh(ax+b)+c$
$\int \operatorname{sech}^2(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}\tanh(ax+b)+c$
$\int \operatorname{csch}^2(ax+b)\,dx$	$-\frac{1}{a}\coth(ax+b)+c$
$\int \operatorname{sech}(ax+b)\cdot\tanh(ax+b)\,dx$	$-\frac{1}{a}\operatorname{sech}(ax+b)+c$
$\int \operatorname{csch}(ax+b)\cdot\coth(ax+b)\,dx$	$-\frac{1}{a}\operatorname{csch}(ax+b)+c$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\int_1^2 f(x)\,dx \Rightarrow \frac{3}{2}(20) = 30$

$\Rightarrow \int f''(x)\,dx = f'(x)+c$

$\Rightarrow \int f'(x)\,dx = f(x)+c$

$\Rightarrow \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)' = 0$

$\Rightarrow \int x\sqrt{1-x}\,dx$

$\Rightarrow u = \sqrt{1-x}$

$u^2 = 1-x \Rightarrow -2u\,du = dx$

$x = 1-u^2$

$\Rightarrow \int (1-u^2)\cdot u\cdot -2u\,du$

$\Rightarrow \int (-2u^2+2u^4)\,du$

$\Rightarrow \frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + c$

$\Rightarrow \frac{2(\sqrt{1-x})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{1-x})^3}{3} + c$

مكتبة خواطر

Ex :- $\int \sinh(5x-4).dx$

$\Rightarrow \frac{1}{5}\cosh(5x-4)+C$

Ex :- $\int \sinh x \cosh^5 x.dx$

$\Rightarrow u=\cosh x \Rightarrow$

$du=\sinh x.dx$

$\Rightarrow \frac{du}{\sinh x}=dx$

$\Rightarrow \int \sinh x.u^5.\frac{du}{\sinh x}$

$\Rightarrow \int u^5.du \Rightarrow \frac{u^6}{6}+C$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\cosh^6 x}{6}+C}$

$\int \underbrace{\sinh x+\cosh x}.dx$

e^x متقابلة

$\Rightarrow \int e^x.dx = e^x+C$

Ex :- $\int \frac{1}{\cosh x+\sinh x}.dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{e^x}.dx \Rightarrow \int e^{-x}.dx$

$\Rightarrow \boxed{-e^{-x}+C}$

$\int f'(x)dx = f(x)+C$

$\Rightarrow \int f'(x).dx = f'(x)+C$

$\Rightarrow f(x)=\int_a^b g(x).dx \Rightarrow f'(x)=$

$\Rightarrow f(x)=\int g(x).dx$

$\Rightarrow f'(x)=g(x).$

Ex $\int f'(x)\,dx = x^2+3x+3$

If $f(1)=2$, find $f(4)$

$\Rightarrow f(x) = x^2+3x+3+C$

$\Rightarrow f(x) = x^2+3x+3+C$

$\Rightarrow f(1) = (1)^2+3(1)+3+C=2$

$\Rightarrow \boxed{C=-5}$

$\Rightarrow f(x) = x^2+3x-2$

$\Rightarrow f(4) = (4)^2+3(4)-2$

$\Rightarrow 16+12-2 = \boxed{26}$

Ex: $f'(x) = 3x^2+5x^4+2x$

if $f(0)=0$, find $f(1)$

$\Rightarrow \int f'(x)\,dx = \int 3x^2+5x^4+2x$

$\Rightarrow f(x) = x^3+x^5+x^2+C$

$\Rightarrow f(0) \Rightarrow \boxed{C=0}$

$f(x) = x^3+x^5+x^2$

$f(1) = 1+1+1 = \boxed{3}$ #

If $f(x) = 2x + \int_c^x f(t)\,dt = 8$

Then find th value of c?

بالفرض: $c=x$

عشان نتخلص من التكامل.

$\Rightarrow 2c + \int_c^8 f(t)\,dt = 8$

$\Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow \boxed{c=4}$

$\Rightarrow$ The fundemtal thm of Calculas

$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$

$= h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$

* وصيغ مماثلة

Ex $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} t\,dt$

$= x^2 \cdot 2x - 2x \cdot 2$

$= 2x^3 - 4x$

⇒ Ex $\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$

⇒ $\frac{\sin x}{x} \cdot 1 - \frac{\sin(1)}{1} \cdot (0)$

⇒ $\frac{\sin(x)}{x}$

Ex 3- $\lim_{x\to 1} \frac{x\int_{3}^{x+2} t\,dt}{x-1} = \frac{\infty}{0}$

⇒ $\frac{x\left((x+2)(1) - (3)\cdot(0)\right) + \int_{3}^{x+2} t\,dt}{1\left((1+2)\right) + \int_{3}^{3} t\,dt}$

$= \boxed{3}$

⇒ If $g(x) = x^2 \cdot \int_{6}^{3x} \frac{t^5}{t^2+5}\,dt$

⇒ find $g'(2)$

⇒ $g'(x) = x^2 \cdot \left(\frac{(3x)^5 \cdot 3}{(3x)^2+5} - \frac{(6)^5}{(6)^2+5} \cdot (0)\right) + 2x \int_{6}^{3x} \frac{t^5}{t^2+5}\,dt$

⇒ $g'(x) = \left(\frac{3x^2 \cdot (3x)^5}{(3x)^2+5} + 2x \int_{6}^{3x} \frac{t^5}{t^2+5}\,dt\right)$

⇒ $g'(2) = \frac{3(2)^2 \cdot (3\cdot 2)^5}{(3\cdot 2)^2+5} + 2(2)\int_{6}^{6} \frac{t^5}{t^2+5}\,dt$

⇒ $g'(2) = \frac{12 \cdot (6)^5}{(6)^2+5}$

إعداد: أيمن زيود

السؤال العربي

* $f'(x) = 3f(x)$

⇒ where $f(0) = 2$, find $f(x)$

⇒ $\frac{f'(x)}{f(x)} = 3$

⇒ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3 \cdot dx$

⇒ $\ln|f(x)| = 3x + C$

⇒ $\ln(|f(x)|)$ ⇒ $\ln 2 = C$ ⇒ $C = \ln 2$

⇒ $e^{\ln(|f(x)|)} = e^{3x + C}$

⇒ $f(x) = e^{3x + \ln 2}$

مكتبة خواطر

Area

* دائماً نعوض عدد بين a,b حتى نحدد اذا كانت التكامل موجبة ولا سالبة في حالة عوضنا وطلع سالبة بنعكس حدود التكامل .

مثلاً :

$$\int_{-1}^{1} x+1 =$$

نعوض ② بطلع جواب موجب معناته بنفي حدود التكامل وي ماهو .

مثال (c) :

$$\int_{1}^{2} x-1$$

نعوض ② بطلع سالب معناته بعكس حدود التكامل

$$\int_{3}^{1} 1-x$$

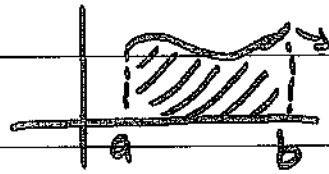
The area of the origion bounded by the curve $f(x) \cdot g(x)$ from $x=a$ To $x=b$

① $f(x)$, x-axis
② $f(x)$, $g(x)$
③ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$

حالة ② مثل دائرة

حالة ①

$f(x)$. x-axis



$$A = \int_{a}^{b} f(x) \cdot dx$$

خط : عبد الله دياك

صفحة : { 170 }

مكتبة خواطر

دائما بجاي الحالة بتاقع
Y مع صفر

$Y = 0$

$x^2 + 1 = 0$

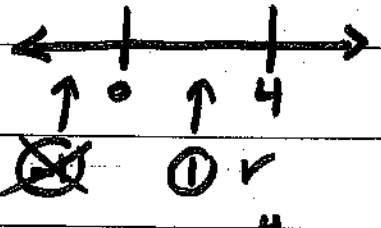
لا تحلل

نأخذ مثال تحلل

Ex Find the area between
$Y = x^2 - 1$ & x-axis
& $x = 0$ & $x = 4$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$, $x = \pm 1$



$$A = \int_0^1 (x^2-1)\,dx + \int_1^4 (x^2-1)\,dx$$

Ex find the area of
region that is by
$Y = x^2 + 1$ & x-axis
& $x = 0$, $x = 2$?

$$A = \int_0^2 (x^2+1)\,dx$$

نوخذ ① موجب $2 = (1)^2 + 1$ موجب
مساحة حدود التكامل بقل ذي
هي

$$A = \int_0^2 (x^2+1)\,dx$$

$$A = \frac{x^3}{3} + x \Big]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \boxed{\frac{14}{3}}$$

حالة ②

$f(x)$ & $g(x)$

نفس الحالة الأولى

بس هون بقاطع عن طريق

$f(x) = g(x)$

وبس ... $A = \int_a^b f(x) - g(x)$

Ex Find The Area between

$y = x^2 - 1$, $y = x + 1$

& y-axis & $x = 5$

ملاحظة y-axis ← $x = 0$

x-axis ← $y = 0$

يعني العكس

$x^2 - 1 = x + 1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$\int_{-1}^{2}$ $\int_{2}^{5}$

$\Rightarrow A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 1)\,dx$

بنوفذ ① $\int_0^1 x^2 - 1$ ←

بطلع سالب $(\frac{1}{2})^2 - 1$

$\Rightarrow \int_1^0 (x^2 - 1)\,dx$

$\Rightarrow \int_1^4 x^2 - 1$

بنوفذ ② بطلع موجب

$(2)^2 - 1$

بخليه اذي ماهو

Then Area =

$A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 1)\,dx$

مع تحيات العبقرية

أمال

(دعولها ...)

مكتبة خواطر

$A = \int_0^2 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

$+ \int_2^5 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

$\Rightarrow \int_0^2 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

بنوخذ ① بطلع سالب

$\Rightarrow \int_2^0 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

$\Rightarrow \int_2^5 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

بنوخذ ② بطلع موجب بضل زي ما هو

Then Area =

$A = \int_2^0 ((x^2-1)-(x+1))\,dx +$

$\int_2^5 ((x^2-1)-(x+1))\,dx$

كمل لحالك .

مثال

$y = \sin x \ , \ y = \cos x$

$y = 0 \ , \ x = \frac{\pi}{2}$

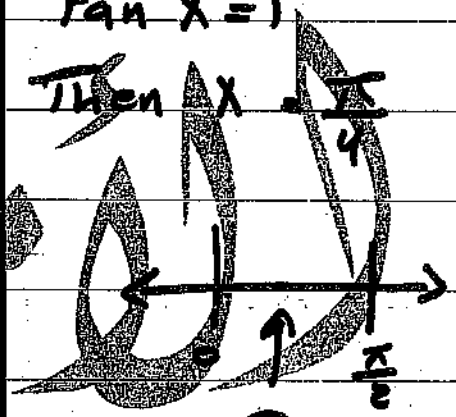
$\sin x = \cos x$

بقسم على $\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$

$\tan x = 1$

Then $x = \frac{\pi}{4}$



$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)$

بنوخذ $\frac{\pi}{6}$ بطلع سالب

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (\cos x - \sin x)\,dx$

$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$ بنوخذ $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (\sin x - \cos x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)$ بطلع موجب

مثال: Area between $y=-e^x$, X-axis

حالة (1)

$\int x = \ln 2$ $\int x = \ln 3$

$A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} -e^x \, dx$

بنوخذ $\ln(2.5)$ بطلع سالب

$A = \int_{\ln 3}^{\ln 2} -e^x \, dx$

$-e \Big]_{\ln 3}^{\ln 2} = \left(-e^{\ln 2}\right) - \left(-e^{\ln 3}\right)$

$-2 + 3 = 1$ ✓

مثال: $y=e^x$, $y=e^{2x}$

$\int x=0$, $x=\ln 2$

$e^x = e^{2x}$

بنوخذ ln للطرفين

$\ln e^x = \ln e^{2x} \Rightarrow x = 2x$

$\ln 2$ $x=0$

$\int e^x - e^{2x}$

بنوخذ $\ln(1.5)$

$\ln 1.5$ $e^{\ln(1.5)}$

$e^{\ln 1.5} - e^{\ln(1.5)^2}$

$1.5 - (1.5)^2$

سالب

$A = \int_{\ln 2}^{0} e^x - e^{2x} = \frac{1}{4}$

مكتبة خواطر

Volumes الحجوم

① حالة Area نفس تطبيق وحالة ② بس القانون بختلف

حالة ① * f(x) & x-axis

$f(x) = 0$

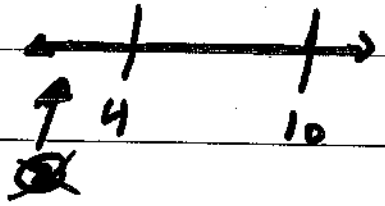
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Ex Volume $f(x) = \sqrt{x-2}$

$x \in [4, 10]$

$\sqrt{x-2} = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



$$V = \pi \int_4^{10} (\sqrt{x-2})^2 \, dx = 36\pi$$

حالة ② * f(x), g(x)

$f(x) : g(x)$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2$$

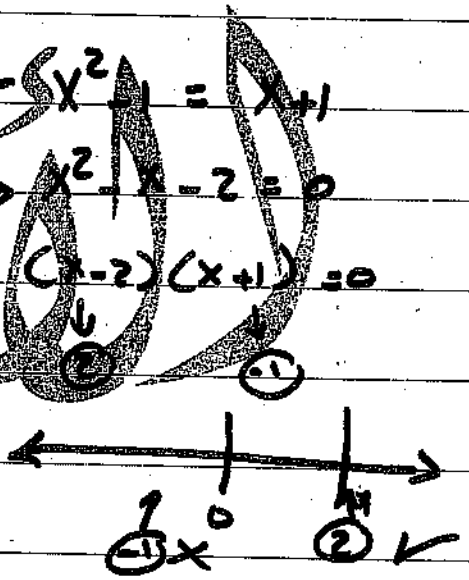
Ex $f(x) = (x+1)$

$g(x) = (x^2 - 1)$ at $x \in [0, 2]$

$* x^2 - 1 = x + 1$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$



$$V = \pi \int_0^2 (x^2-1)^2 - (x-1)^2$$

بنوخد ① بطلع سالب

$$V = \pi \int_0^2 (x^2-1)^2 - (x+1)^2$$

مكتبة خواطر

Area of the Circle

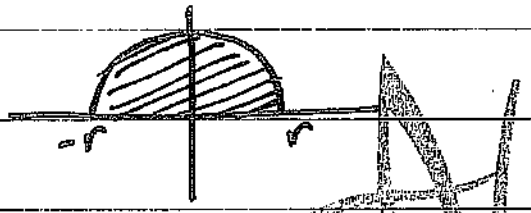
r : radius نصف القطر

Circle : πr^2

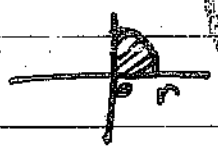
Sime Circle : $\frac{\pi r^2}{2}$

Quarter : $\frac{\pi r^2}{4}$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\pi r^2}{2}$$



$$\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\pi r^2}{4}$$



$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = -\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= -\frac{\pi r^2}{2}$$

$$\int_{-r}^{0} \sqrt{r^2 - x^2} = -\int_{-r}^{0} \sqrt{r^2 - x^2} = -\frac{\pi r^2}{4}$$

Then :

Ex

1) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2} = \frac{\pi (3)^2}{2}$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

2) $\int_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2} = \frac{\pi (3)^2}{4}$

3) $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2} = \frac{\pi (2)^2}{4}$

$$= \frac{1}{2}\pi$$

فيرست كمراسيد

Choose the best correct answer (2.5 points for each)

جميع الحلول
فلف الصفحة
أ.

1) If $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{x-1}{x-2}$, then the domain of $(fog)(x)$ is

a) $\mathbb{R}-\{-1,-2\}$ b)$\mathbb{R}-\{1,2\}$ c)$\mathbb{R}-\{-1\}$ d) $\mathbb{R}-\{-2\}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2+x-6}$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{15}$ c) 2 d) -2

3) $\cos^{-1}(\cos(\frac{11\pi}{7}))$

ايمن زيود #دوسية الامال

a) $\frac{11\pi}{7}$ b) $\frac{4\pi}{7}$ c) $\frac{3\pi}{7}$ d) $\frac{6\pi}{7}$

4) Let $3e^{2x}=1$, then the value of x is

a) $-\frac{1}{2}ln3$ b) $\frac{1}{2}ln3$ c) $-ln\frac{1}{3}$ d) $2ln\frac{1}{3}$

5) The vertical asymptote(s) of $f(x)=\frac{x^2-4}{(x-2)(x-3)(x+2)}$

a) $x=2,x=3,x=-3$ b) $x=3,x=-3$ c) $x=3$ d) $x=2,x=-3$

6) The range of $f(x)=\frac{1-6x}{2x-1}$ is

a) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ b)$\mathbb{R}-\{3\}$ c)$\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ d) $\mathbb{R}-\{-3\}$

7) $sin(tan^{-1}(x))=$

a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(٥)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

8) The range of $g(x) = x^2 - 2x - 3$ is:

a) $[4, \infty)$ b) $[-4, \infty)$ c) $(-\infty, 4]$ d) $(-\infty, -4]$

9) If $f(x) = x^3 + 3x - 20$, then $f^{-1}(16) =$

a) -2 b) 2 c) -3 d) 3

10) $\log_2 18 + \log_2 24 - \log_2 54 =$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

11) If $\ln(x^2 - 5) - \ln(4x) = 0$, then

a) $x = 5$ b) $x = -1$ c) $x = -1, x = 5$ d) $x = 0$

12) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x^2-9}$

a) -3 b) 3 c) $+\infty$ d) $-\infty$

ايمن زبود #دوسية الامال

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q1) $D_{g(x)} = R - \{2\}$

$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{x-2}{x-1}$

Domain $R-\{1\}$

$R-\{1\} \cap R-\{2\} \Rightarrow R-\{1,2\}$

b

Q2) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2+x-6} * \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+5)-9}{(x+3)(x-2)} * \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x+3)(x-2)} * \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{1}{6} * \frac{4}{5} = \frac{4}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}$

b

Q3) $\cos^{-1}(\cos(\frac{11\pi}{7}))$ ربعها رابع

$2\pi - \frac{11\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}$

$\cos^{-1}(\cos(\frac{3\pi}{7})) = \frac{3\pi}{7}$

c

Q4) $3e^{2x} = 1$

$e^{2x} = \frac{1}{3}$

$\ln e^{2x} = \ln(\frac{1}{3})$

$2x = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$

$= \frac{1}{2}\ln(3)^{-1} = \boxed{\frac{-1}{2}\ln 3}$

a

Q5) $(x-2)=0 \Rightarrow x=2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

not vertical

$(x-3)=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3}$$

d.n.e vertical

$(x+2)=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3} = \frac{-1}{5}$$

not vertical

Then $\boxed{x=3}$ vertical

C

Q6) $f(x) = \frac{1-6x}{2x-1}$

$y = \frac{1-6x}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = 1-6x$

$\Rightarrow 2xy + 6x = 1+y$

$x = \frac{1+y}{(2y+6)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+x}{2x+6}$

Domain $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

Domain $f^{-1}(x) = R - \{-3\}$

Then Range $f(x) = R - \{-3\}$

d

٩) $f^{-1}(16) = x$

$f(x) = x^3 + 3x - 20$

$\Rightarrow 16 = x^3 + 3x - 20$

$\Rightarrow x^3 + 3x - 36 = 0$

بالتجريب $x = 3$

ج

١٠) $\log_2 18 + \log_2 24 - \log_2 54$

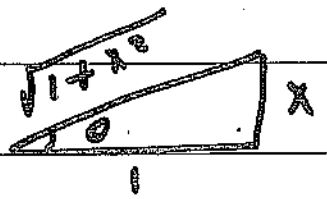
$\log_2 \left(\frac{18 \times 24}{54}\right) = \log_2 \left(\frac{2 \times 24}{6}\right)$

$= \log_2 (2 \times 4) = \log_2 8$

$= \log_2 (2)^3 = 3$

ج

٧) $\sin(\tan^{-1}(x))$



$\theta = \tan^{-1}(x)$

$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ب

٨) $g(x) = x^2 + bx + c$

$a = 1 \quad b = +2 \quad c = 1$

$\frac{-b}{2a}$

$\hookrightarrow \frac{+2}{2} = 1 \quad \therefore f(1) = 4$

$a > 0$

$[f(\frac{-b}{2a}), \infty) = [4, \infty)$

ب

مكتبة خواطر

Q11) $\ln(x^2-5) = \ln(4x)$

نأخذ e

$\Rightarrow x^2-5 = 4x$

$\Rightarrow x^2-4x-5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$x=5 \quad , \quad x=-1$

$\because x=5 \in$ Domain ✓

$\because x=-1 \notin$ Domain ✗

Then $x=5$

Q

Q12) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\text{عدد}}{0}$

طالبها من اليمين خذ عدد اكبر

لبنتفه

مثلا (1)

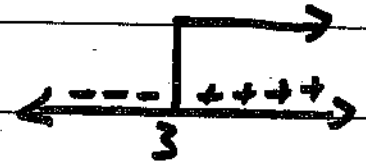
$\lim_{x\to 4^+} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{7}{+} > 0$

Then $+\infty$

OR

طريقة الحل الثانية

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$



Then $+\infty$

C

الأمال
السبيل الوحيد للنجاح
هو أن تحب ما تفعله

The Hashemite University Department of Mathematics
Second Exam Date 29-11-2016

الرقم الجامعي:

اسم الطالب: وقت المحاضرة:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e

سكندر محمد السيد

جميع الحلول
خلف الامتحان

Choose the best correct answer (2.5 points for each)

1) The equation $x^3 + 3x = 2$, has solution in

a) $[1,3]$ b) $[1,2]$ c) $[2,3]$ d) $[0,1]$

2) The function $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+2}, & x \leq 1 \\ \frac{x+2}{x+3}, & x > 1 \end{cases}$ is continuous on

a) $\mathcal{R} - \{-2,-3,1\}$ b) $\mathcal{R} - \{-2\}$ c) $\mathcal{R} - \{-2,1\}$

3) The function $f(x) = \frac{x - \tan^{-1}(x)}{2-4x}$ has horizontal asymptote at

a) $x = \frac{1}{4}$ b) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ c) $x = \frac{-1}{4}$ d) $x = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}$

4) If $f(x) = 2 + 2\tan^{-1} 4x$, then $f'(1) =$

a) $\frac{2}{17}$ b) $\frac{8}{17}$ c) $\frac{4}{17}$ d) 4

5) If $f(x) = \ln(\ln x^5)$ then $f'(e) =$

a) e b) $2e^{-1}$ c) e^{-1} d) $\frac{5}{e}$

(٥٥)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

6) If $y = 8^x + \ln(\cosh x)$, then $\frac{dy}{dx}$ at $x = 0$

a) $\ln 5$ b) $\ln 8$ c) $\ln 4$ d) $\ln 2$ e) None of these

7) If $x^3 + 3y^2 = 4$ then $y''(1,-1) =$

a) $\frac{-4}{0}$ b) $\frac{4}{0}$ c) $\frac{-7}{9}$ d) $\frac{7}{9}$ e) None of these

8) If $f(x) = \frac{\sin x}{1+\tan x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, has horizontal tangent at $x =$

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) 0 e) None of these

9) $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{2h^2+3h} =$

a) $\frac{1}{3}f'(0)$ b) $3f'(0)$ c) $\frac{1}{2}f'(0)$ d) $\frac{-1}{3}f'(0)$ e) None of these

10) The slope of the tangent line to the curve $y^2 + 2xy = 12$ at the point $(-2, -2)$ is

a) 1/2 b) -1/2 c) 2 d) -2 e) None of these

11) If $y = \sin^{-1}(e^{2x})$, then $\frac{dy}{dx} =$

a) $\frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x^2}}}$ b) $\frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$ c) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x^2}}}$ d) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$ e) None of these

12) Let $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$, and $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$, then $g'(2) =$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{5}{4}$ e) None of these

Good Luck

(oo)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q1

The equation $x^3+3x=2$ has solution?

$x^3+3x-2=0$

$f(0)=-2<0$ ④ $[0,1]$

$f(1)=2>0$

Q2 The function $f(x)$ is continuous in

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+2} & , x\le 1\\ \dfrac{x+2}{x+3} & , x>1\end{cases}$$

$\dfrac{x-3}{x+2}$ $R-\{-2\}$ ∈ $x\le 1$

$\dfrac{x+2}{x+3}$ $R-\{-3\}$ ∉ $x>1$

$-3 \notin x>1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{3}{4}$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{-2}{3}$

$R-\{-2,1\}$ ⑤

Q3 $f(x)=\dfrac{x-\tan^{-1}x}{2x-4x}=\dfrac{-1}{4}$ ⑤ horizontal asymptote صاحل على x

Q4 $f(x)=2+2\tan^{-1}x$ $f'(1)$??

$f'(x)=\dfrac{2.4}{1+16x^2}=\dfrac{8}{17}$ ⑥

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q5 $f(x) = \ln(\ln(x^5))$ $f'(e)$ 4

$\Rightarrow f'(x) = \frac{5x^4}{x^5 \ln x} = \frac{5x^4}{5x^5 \ln x} = \frac{1}{e} = \boxed{e^{-1}}$ (c)

Q6 $y = 3^x + \ln(\cosh x)$ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

$y' = 3^x \cdot \ln 3 + \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow 3^0 \ln 3 + \frac{\sinh 0}{\cosh 0}$

① ②

$= \boxed{\ln 3}$ (b)

Q7 $x^2 + 3y^2 = 4$ $y''(1,-1)$

$2x + 6yy' = 0$ $y' = \frac{-x}{3y}$

$y'' = \frac{(3y \cdot -1) - (-x \cdot 3y')}{9y^2}$

$= \frac{-3y + 3x\left(\frac{-x}{3y}\right)}{9y^2} = \frac{3 + 1}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$ (b)

Q8 $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ has horizontal tangent

$f(x) = \frac{\frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}$ $f'(x) = 0$

$f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$ $f'(x) = \frac{-(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = 0$

$-(-\sin x + \cos x) = 0$

$\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ (b)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q9: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{2h^2+3h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \cdot \frac{1}{2h+3}$

$f'(0) \cdot \frac{1}{0+3} = \boxed{\frac{1}{3}f'(0)}$ (a)

Q10: The slope of tangent $y^2 + 2xy = 12$ $(-2,-2)$

$2yy' + 2(xy' + y) = 0$

$-4y' + 2(-2y' - 2) = 0$

$-8y' - 4 = 0$

$\boxed{y' = \frac{-1}{2}}$ (b)

Q11: $y = \sin^{-1} e^{2x}$ $\frac{dy}{dx}$

$y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}$ $\boxed{\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}}$ (d)

Q12: $f(2) = 4$ $f'(2) = 3$ $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$ $g'(2) = ??$

$g'(x) = \frac{\sqrt{x+2}\, f'(x) - f(x)\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2})^2}$

$g(2) = \frac{\sqrt{4}\, f'(2) - f(2)\frac{1}{2\sqrt{4}}}{(\sqrt{(2+2)})^2}$

$= \frac{2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{1}{4}}{4} = \frac{6-1}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{5}{4}}$

(d)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

The Hashemite University

Department

Date: 8/1/2017

Time: 1:40 minutes

... contains 20 questions. Please select the correct answer and mark it ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

1) If $\sinh x + \frac{1}{2}e^{-x} = 2$, then $x =$

a) $\ln 2$ b) $\ln 4$ c) $\ln 6$ d) $\ln 8$

2) The equation of the tangent line to the curve $x^3 + y^2 = 0$, at $(-1,-1)$, is

a) $y - 1 = \frac{-3}{2}(x+1)$ b) $y + 1 = \frac{1}{2}(x+1)$ c) $y + 1 = \frac{3}{2}(x-1)$ d) $y - 1 = \frac{-3}{2}(x-1)$

3) The function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ Has inflection point(s) at

a) $x = -1, x = 1$ b) $x = 0, x = -1$ c) $x = 0, x = 1$ d) Has no inflection points

4) If $x = 3$ is an extreme value (max or min) for $f(x) = x^2 - 2ax + 1$, then $a =$

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) -3 d) 3

5) The domain of $f(x) = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$ is

a) $(-\infty,3] \cup [3,\infty)$ b) $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$ c) $[-3,3]$ d) $(-3,3)$

6) The range of $f(x) = x^2 + 4x + 3$ is

a) $(-\infty,-1]$ b) $[-1,\infty)$ c) $(-\infty,1]$ d) $[1,\infty)$

7) If $y = \sinh x$, then $\frac{dy}{dx}$ at $x = \ln 3$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{5}{3}$

8) One of the following functions is decreasing on $\mathbb{R}$

a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = (3x-4)^3$ d) $f(x) = (2-3x)^3$

9) If $f(x) = (x)^{\cos x}$ then $f'(x) =$

a) $(\sin x)^x(\frac{x\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x))$ b) $(\cos x)^x(\frac{-x\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x))$

c) $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln(x))$ d) $x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln(x))$

فايناك عمي السيد

الحلول خلف الامتحان

(050)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

10) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{4x} =$

a) e^{12} b) e^{6} c) e^{8} d) e^{10}

11) If y=6 and $x = 3$ are horizontal and vertical asymptotes of $f(x) = \frac{bx+1}{2x-a}$ then $a, b =$

a) $a = 6, b = 2$ b) $a = 12, b = 6$ c) $a = 6, b = 12$ d) $a = 2, b = 6$

12) If $g(x) = x^2 \int_5^{5x} \frac{t}{t+1} dt$ then $g'(1) =$

a) a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{16}{5}$ c) $\frac{25}{6}$ d) $\frac{4}{3}$

13) $\int \sinh(6-2x)\,dx =$

a) $-2\cosh(6-2x)+c$ b) $\frac{1}{2}\cosh(6-2x)+c$ c) $2\cosh(6-2x)+c$ d) $-\frac{1}{2}\cosh(6-2x)+c$

14) The area of the region enclosed by $y = x^2 + x$, $y = 2x$ is

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{10}$

15) If f continuous and $\int_0^2 f(x)dx = 20$, then $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin\theta)\cos\theta d\theta =$

a) 0 b) 5 c) 20 d) 10

16) The volume of the solid generated by revolving the region enclosed by the curves $y = x^4$, $y = x$, about the x-axis is given by

a) $\pi\int_0^1(y^2-\sqrt{y})dy$ b) $\pi\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)dy$ c) $\pi\int_0^1(x^2-x^8)dx$ d) $\pi\int_0^1(x^8-x^2)dx$

17) $\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-3}\right)dx =$

a) $\ln\left|\frac{1-x}{x-3}\right|+c$ b) $\ln\left|\frac{x-3}{1-x}\right|+c$ c) $\ln|(x-3)(1-x)|+c$ d) $-\ln|(x-3)(1-x)|+c$

18) If $\int_5^1 3f(x)dx = 6$, and $\int_1^2 5f(x)dx = 15$ then $\int_5^2 6f(x)dx =$

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40

19) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}} dx =$

a) $-\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$

20) $\int(2x-1)(x-2)^7dx =$

a) $\frac{2}{9}(x-2)^9+\frac{3}{8}(x-2)^8+c$ b) $\frac{2}{9}(x-2)^9+\frac{5}{8}(x-2)^8+c$

c) $\frac{2}{9}(x+2)^9-\frac{3}{8}(x+2)^8+c$ d) $\frac{2}{9}(x+2)^9-\frac{5}{8}(x+2)^8+c$

(000)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q1)

$\sinh x + \frac{1}{2}e^{-x} = 2$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} = 2$

$\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{e^x}{2} = 2$

$e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$ b

Q2) $x^3 + y^2 = 0$ at $(-1,-1)$

$3x^2 + 2yy' = 0$

$y' = \frac{-3x^2}{2y} \Rightarrow y' = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow y+1 = \frac{3}{2}(x+1)$

b

Q3) $f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f'' = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x = 1$ $x = -1$

+ + − − − + + + +

-1 1

inflection point $x=1$, $x=-1$

c

Q4) $f'(x) = 2x - 2a$

$x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0$

$2(3) - 2a = 0$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$ d

Q5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

$9 - x^2 > 0$, $9 > x^2$

$\Rightarrow 3 > |x|$, $3 > x > -3$

$[-3,3] - \{3,-3\}$

$\Rightarrow (-3,3)$ d

Q6) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

$a > 0$, $[f(2), \infty)$

$f(2) = (2)^2 + 4(2) + 3 = -1$

$[-1, \infty)$ b

حلول فاينال عمر السيد

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q7) $Y = \sinh x$, $\frac{dy}{dx}$ at $x = \ln 3$

$\frac{dy}{dx} = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

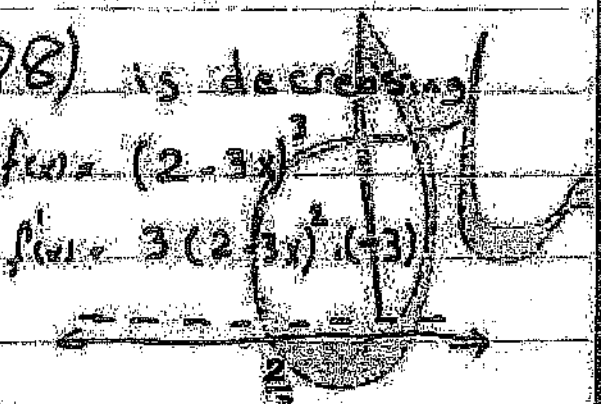
$\Rightarrow \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2}$

$= \frac{9+1}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ d

Q8) is decreasing?

$f(x) = (2-3x)^3$

$f'(x) = 3(2-3x)^2 \cdot (-3)$



then $f(x) = (2-3x)^3$ is

increasing on $\mathbb{R}$ d

Q9) $f(x) = (x)^{\cos x}$

$\ln f(x) = \cos x \ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right) f(x)$

$\Rightarrow f'(x) = (x)^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)$ d

Q10) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x} = e^{12}$ a

Q11) $y = 6$, $x = 3$

horizontal vertical

$2(3) - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 6}$

$\frac{b}{2} = 6 \Rightarrow \boxed{b = 12}$ c

Q12) $g(x) = \int_{x^2}^{5x} \frac{t}{t+1} \, dt$, $g'(1)$

$g'(x) = x^2\left(\frac{5x}{5x+1} \cdot 5\right) + \int_5^{5x} \frac{t}{t+1} \, dt$

$g'(1) = 1 \cdot \left(\frac{5 \cdot 5}{6}\right) + \text{zero}$

$= \frac{25}{6}$ c

Q13) $\int \sinh(6-2x) \, dx$

$= -\frac{1}{2} \cosh(6-2x) + C$ d

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Q14) $Y = X^2 + X \quad Y, 2X$

$X^2 + X = 2X$

$X^2 - X = 0 \quad , \quad X=0 \; , \; X=1$

$\int_0^1 (2X - X^2)\,dx \Rightarrow \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} \Big]_0^1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$ ج//

Q15) $\int_0^2 f(x)\,dx = 20$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$

$u = 2\sin\theta \Rightarrow \frac{du}{2\cos\theta} = d\theta$

$x=0 \Rightarrow u=0 \quad x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=2$

$\int_0^2 f(u)\cdot\cos\theta\cdot\frac{du}{2\cos\theta}$

$\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$ ب//

Q16) $X^4 = X \Rightarrow X=0, \; X=1$

$V = (\pi)\int_0^1 (x^2 - x^8)\,dx$ ج//

Q17) $\int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-3}\right)$

$-\ln|1-x| + \ln|x-3|$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-3}{1-x}\right| + c$ ب//

Q18) $\int_5^1 3f(x)\,dx = 6, \int_5^1 f(x)\,dx = 2$

$\int_5^2 5f(x)\,dx = 15, \int_1^2 f(x)\,dx = 3$

$\int_5^2 6f(x) = 6[2+3] = 30$ ج//

Q19) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,dx$

$-2\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{-e^{-x}}{1+(e^{-x})^2}\,dx$

$= -2\tan^{-1}(e^{-x})$

$= -2\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}(1)\right]$

$= -2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right]$

$= -2\cdot\left(\frac{+4\pi - 6\pi}{24}\right)$

$= -2\left(\frac{-2\pi}{24}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$ ج//

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

الأمثلة

20) $\int (2x-1)(x-2)^7 \cdot dx =$

$u = x-2 \Rightarrow du = dx$

$\int (2(u+2)-1) \cdot u^7 \cdot du = \int 2u^8 + 3u^7 \cdot du$

$\Rightarrow \frac{2}{9}u^9 + \frac{3}{8}u^8 + c \Rightarrow \frac{2}{9}(x-2)^9 + \frac{3}{8}(x-2)^8 + c$

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

سكند سيكاري

Q $f(x)=x^x$, Then $f'(x)$

دائماً (امتحان) يوخذ Ln للطرفين

$Y=x^x \Rightarrow \ln Y=\ln x^x$

$\Rightarrow \ln Y = x \ln x$

$f'(x) \Rightarrow \frac{Y'}{Y}=\left(x\frac{1}{x}+\ln x\right)$

$Y'=Y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$ //

مكتبة خواطر

6 $f(x) = 3^x$, $f^{(97)}(0)$

بما أنه كثير حدود عليا بدرجة كبيرة

$f(x) = 3^x$

$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3$

$f''(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln 3 = 3^x \cdot (\ln 3)^2$

$f'''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^3$

$f^{(97)} = 3^x \cdot (\ln 3)^{97}$

$f^{(97)}(0) = (\ln 3)^{97} \cdot 3^{(0)} = \boxed{(\ln 3)^{97}}$

سكنسي سماي

Q $f(x) = |x-7|$, then $f'(7)$?

* دائما إذا بده مشتقة وغير مطلق لازم يتعرف مبفصل اول اشي اتصاله إذا كان طالب للنقطة تتعب مبعين المشتقة للعين والمشتقة لليسار إذا كانوا متساويين يتكون موجوده وإذا غير متساويين بتكون غير موجوده (d.n.e)

$|x-7| \Rightarrow x-7 = 0 \rightsquigarrow x = 7$

$\xleftarrow{-(x-7)} \quad 7 \quad \xrightarrow{x-7}$

$$f(x) = \begin{cases} 7-x & , x \leq 7 \\ x-7 & , x \geq 7 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 7^+} x-7 = 0$, $\lim_{x \to 7^-} 7-x = 0$ The cont $x=7$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 7 \\ 1 & , x > 7 \end{cases}$$

$f'(7)^+ = 1$

$f'(7)^- = -1$

$f'(7) = d.n.e$

مكتبة خواطر

Q: let $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin^8 x}\right)$ find $f'(x)$

$f(x) = \ln \sqrt[3]{x^2+1} - \ln \sin^8 x$

$f(x) = \ln (x^2+1)^{\frac{1}{3}} - \ln \sin^8 x$

$f(x) = \frac{1}{3} \ln (x^2+1) - 8 \ln \sin x$

$f'(x) = \frac{1}{3} * \frac{2x}{x^2+1} - 8 \frac{\cos x}{\sin x}$

$f'(x) = \frac{2x}{3(x^2+1)} - 8 \cot x$

* $\sqrt[n]{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{n}}$
* $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
* $\ln a^b = b \ln a$
* $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
* $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
* $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

Q : $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x$

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(-\infty) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Q : The horizontal asymptoty $f(x) = \frac{\sqrt{x^6 + x}}{2x^3 + 1}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^6 + x}}{2x^3 + 1} = \frac{|x^3|}{2x^3} = \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + x}}{2x^3 + 1} = \frac{|x^3|}{2x^3} = \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$

Then $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

Q $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(2x - x^3) =$

$= \tan^{-1}\left(\lim_{x \to -\infty}(2x - x^3)\right) = \tan^{-1}\left(\lim_{x \to -\infty} -x^3\right) = \tan^{-1}(-(-\infty)^3)$

$= \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

مكتبة خواطر

الآمال

إعداد : أيمن زيود

Q: The horizontal asymptoty of the function

$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}|x|}{x-1}\right)$ is (are) ?

اول ما أشوف كلمة horizontal asymptoty بطلع $\lim_{x\to-\infty}$ و $\lim_{x\to+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}|x|}{x-1}\right) = \tan^{-1}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{3}|x|}{x-1}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow = \tan^{-1}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x}{x}\right) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{3}|x|}{x-1}\right) = \tan^{-1}\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\sqrt{3}|x|}{x-1}\right)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow = \tan^{-1}\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3}x}{x}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3}$$

The horizontal $y = \frac{\pi}{3}$, $y = -\frac{\pi}{3}$

* $\lim_{x\to\pm\infty} \text{trig}^{-1}(f(x)) = \text{trig}^{-1}\left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right)$

* $|x| \begin{cases} x\to+\infty & x \\ x\to-\infty & -x \end{cases}$

ق $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{|x-2|}$

بالتعويض $\rightsquigarrow \frac{2-3}{2-2} = \frac{-1}{0}$

دائماً إذا طلع $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

يؤخذ عدد أكبر من $x\to a$

برقم صغير وعدد أصغر

برقم صغير مثلاً

$x \to 2$

أكبر $x\to 2^+$ 2.0001

أصغر $x\to 2^-$ 1.9999

إذا طلع معي موجب خط $+\infty$

إذا طلع معي سالب خط $-\infty$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{|x-2|} = \frac{2.0001-3}{|2.0001-2|} = \frac{\text{سالب}}{\text{موجب}} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{|x-2|} = \frac{1.9999-3}{|1.1999-2|} = \frac{\text{سالب}}{\text{موجب}} = +\infty$

*إذا طلب من $x\to 2^+$ خط

يس جواب الأكبر

*إذا طلب من $x\to 2^-$ خط

جواب الأصغر

$\lim \frac{x-3}{|x-2|} = -\infty$

*إذا طلب مني بشكل عام بدون

إذا اليمين واليسار إذا

متساويين خط القيمة

إذا مختلفات خط d.n.e

$\frac{\text{موجب}}{|\text{سالب}|} = -$ علاقة

الآمال

إعداد : أيمن زيود

Q: The vertical asymptoty $f(x)=\frac{2x-4}{|x|-2}$

حسب النظرية الرياضية إذا جاها ← عدد (not vertical)

(vertical) عدد / صفر

$|x|-2$

$x=\pm 2$

$x=2 \rightsquigarrow \frac{2x-4}{x-2}=\frac{2(x-2)}{(x-2)}=2$ (not vertical)

$x=-2 \rightsquigarrow \frac{2x-4}{-x-2}=\frac{-8}{0}$ (vertical)

The vertical $x=-2$

Q: The vertial asymptoty $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ is(are)?

دائما إذا طلب vertical مكان $f(x)$ بسطها مقام وكثيرات حدود كل البسط المقام وبختصر ويطلع اصفار المقام

$f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+1)}$

Then $x+1=0$

$x=-1$ The vertical asymptoty $x=-1$

مكتبة خواطر

كسور ونهايات
بنفس الطريقة أو مقاربات

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} \quad (-1) = \frac{-1}{3x} = \boxed{\frac{-1}{9}}$$

Q $f(x) = \frac{1}{x^2-25}$; Then the values of "x" at which f(x) is discont?

* إذا طلب continous بطلع المجال
* إذا طلب discont. بطلع المجال وبدون القيم المستثناة

$\frac{1}{x^2-25} \to \mathbb{R}$

$x^2-25 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x^2-25=0\}$

$x = \pm 5$

Then dis cont. at $x=5, x=-5$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 9x} = \boxed{\frac{2}{9}}$

بشكل عام $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} - \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\tan ax}{bx} = \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Q) $f(x) = \tan^{-1} x$, $f'(x)$?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Q) $f(x) = \tan^{-1}(\cot x)$; Then $f'(x)$?

$$f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot^2 x)} = \frac{-\csc^2 x}{\csc^2 x} = \boxed{-1}$$

مطابقة

Q) $f(x) = \sin^{-1}(\cos x)$, find $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

حيث $\sin\frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$; $\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \boxed{1}$

مكتبة خواطر

Q $f(x)=(x-2)^{10}$, Then $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$?

زي كأنه بكيلك طلع اكشفة وحوط فيها

للاش كيف حكيت ؟؟ لانه هاضا التعريف

العام للمشتقة

$f'(x)=10(x-2)^{9}=10(3-2)^{9}=\boxed{10}$

$\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=?$

التعريف العام للمشتقة

$f(x)=\ln x$

$f'(2)$ هو بدي

$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(2)=\boxed{\frac{1}{2}}$

6 $f(x) = \log_2(1+9x)$, Then the slop of tangent line of $f(x)$ at $x=0$?

Slop tangent $\rightarrow f'(x)$

$$f'(x) = \frac{9}{(1+9x)\ln 2} =$$

$$f'(0) = \frac{9}{(1+0)\ln 2} = \boxed{\frac{9}{\ln 2}}$$

Q, $f(x) = e^{(x^3-12x)}$, Then the value of "x", at which the graph f(x), has horizontal tangent?

$\downarrow$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = (3x^2-12)\, e^{(x^3-12x)} = 0$

$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

$e^{x^3-12x} > 0 \neq 0$

Thus $\boxed{x = \pm 2}$

1. The domain of the function $f(x)=\sin^{-1}(2x-1)$ is:

a. $[0, 1]$ b. $[-1, 0]$ c. $[1, 2]$ d. $[-2, -1]$ e. none

2. Let $f(x)=\tanh x$. Then the range of f is:

a. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ b. $(-1,1)$ c. $[0,\pi]$ d. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e. none

3. Let $f(x)=\tan^{-1}(x)$. Then $f'(x)=$

a. $\frac{1}{1+x^2}$ b. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ c. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ d. $\frac{-1}{1+x^2}$ e. none

4. $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=$

a. $\frac{9\pi}{2}$ b. $\frac{9\pi}{4}$ c. 9π d. 0 e. none

فاينال محمد سرسك

5. $\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x=$

a. $\frac{\pi}{2}$ b. -1 c. 1 d. $-\frac{\pi}{2}$ e. none

6. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}=$

الامال ايمن زيود

a 2 b. -2 c. $\frac{1}{2}$ d. $-\frac{1}{2}$ e. none

7. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}=$

a. does not exist b. 4 c. 2 d. 0 e. none

8. The horizontal asymptotes of the function $f(x)=\frac{\sqrt{x^6+x}}{2x^3+1}$ are:

a. $y=\frac{1}{2}$ only b. $y=-\frac{1}{2}$ only c. $y=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ d. f has no horizontal asymptotes

9. $\lim_{x\to\infty}(x)^{2/\ln x}=$

a. 1 b. ∞ c. 2 d. e^2 e. none

(HMR)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

10. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} =$

a. 1 b. e^6 c. e^3 d. e^2 e. none

11. Let f be a function such that $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x \in [0,4]$. Then the absolute maximum value of f is:

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. none

12. Let $f(x) = \sinh x$. Then $f'(x) =$

a. $\sinh x$ b. $\cosh x$ c. $-\sin x$ d. $\cos x$ e. none

13. The value of $\int_{-2}^{2}\left(1 + \frac{\sin t}{t^2+1}\right)dt$ is:

a. 8 b. 2 c. 6 d. 4 e. none

14. $\frac{d}{dx}\int_{2}^{x^3}\frac{dt}{t^2+1} =$

a. $\frac{1}{x^3+1}$ b. $\frac{2x}{x^4+1}$ c. $\frac{1}{x^6+1}$ d. $\frac{2x}{x^3+1}$ e. none

15. $\int 2^x dx =$

a. $2^x + C$ b. $2^x(\ln 2) + C$ c. $\frac{2^x}{(\ln 2)} + C$ d. $\frac{2^{x+1}}{(x+1)} + C$ e. none

16. $\int \tanh x\,dx =$

a. $\ln|\cosh x| + C$ b. $\ln|\sinh x| + C$ c. $\ln|\cos x| + C$ d. $\ln|\sin x| + C$ e. none

17. $\int \operatorname{sech}^2 x\, e^{2\tanh x}\,dx =$

a. $e^{2\tanh x} + C$ b. $e^{\tanh x} + C$ c. $\frac{1}{2}e^{2\tanh x} + C$ d. $\frac{1}{2}e^{\tanh x} + C$ e. none

18. If $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$, then $\int_e^1 \frac{f(\ln x)}{x}\,dx =$

a. 4 b. 0 c. 1 d. -4 e. none

19. Let f be a function such that $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Then f has an inflection point at $x =$

a. 3 b. 1 c. -3 d. -1 e. none

III

(MMM)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

20. Let f be a function such that $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$. Then f has a local minimum value at $x=$

a. 3 b. 1 c. -3 d. -1 e. none

21. The area of the region bounded by the curves $y=x$ and $y=x^3$ equals:

a. $\frac{1}{2}$ b. 1 c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{6}$ e. none

22. The volume of the solid that results when revolving the region bounded by $x=0$, $x=1$, $y=x^2$ and the x-axis about the x-axis equals:

a. $\frac{1}{5}$ b. 1 c. $\frac{\pi}{5}$ d. π e. none

23. The vertical asymptotes of the function $f(x)=\frac{2x-4}{x^2-2}$ are

a. $x=2$ b. $x=-2$ c. $x=2$, $x=-2$ d. f has no vertical asymptotes e. none

24. $\int \tanh 2x \sec h\, 2x\, dx =$

a. $-\sec h\, x+C$ b. $-\sec h\, 2x+C$ c. $-2\sec h\, 2x+C$ d. $-\frac{\sec h\, 2x}{2}+C$ e. none

25. Let $f(x)=e^{(x^2-12x)}$. Then the values of x at which the graph of f has a horizontal tangent line are

a. 2 only b. -2 only c. 2, -2 d. f has no horizontal tangent line e. none

26. $\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=$

a. 2 b. 3 c. 4 d. 5 e. none

27. $\int_0^1 (2x+1)^{10}\,dx =$

a. $\frac{1}{22}\left(3^{11}-1\right)$ b. $\frac{1}{11}\left(3^{11}-1\right)$ c. $\frac{1}{2}\left(3^{11}-1\right)$ d. $\left(3^{11}-1\right)$ e. none

28. Let $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$. Then the domain of f is:

a. $(0,2)$ b. $(0,e^2)$ c. (e^2,∞) d. $(2,\infty)$ e. none

(MMM 1

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

مثال

Q The Range of $\tanh x$?

$(-1, 1)$

Q $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}$

$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (3)^2}{2} = \boxed{\frac{9\pi}{2}}$

Q $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2} = \frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0}$ L'H

$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} - 2}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{4e^{2x}}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

مثال محلول

Q $\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{2}{\ln x}} = ?$, $(\infty)^0$, L'H

$y = (x)^{\frac{2}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2\ln x}{\ln x} = 2$

$\lim_{x\to\infty} 2 = 2$; $\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{2}{\ln x}} = \boxed{e^2}$

Q $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{3\times 2} = \boxed{e^6}$

4/ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x \in [0, 4]$

Then the absolute maximum value of f قيمة عظمى مطلقة

max لازم اطلع النقطة اي يكون $f(x)$ وبعوض بـ

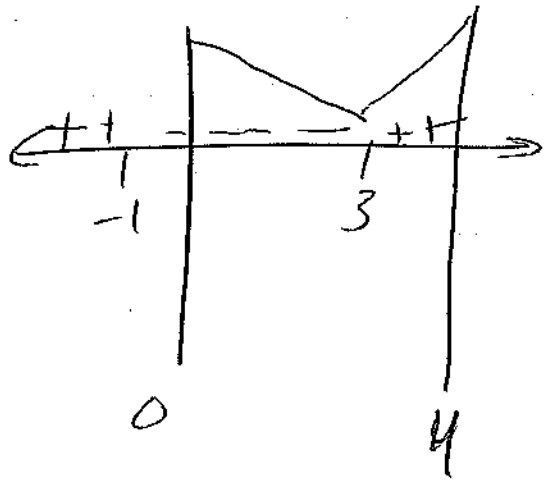
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1)$

$x = 3$

$x = -1$



$f(0) = 1$

$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 9(4) + 1 = -19$

Then absolute maximum $f(0) = \boxed{1}$

(5)

مكتبة خواطر

Q12) $f(x) = \sinh x$, $f'(x)$?

$f'(x) = \cosh x$ فاینال سرمد

Q13) $\int_{-2}^{2} \left(1 + \frac{\sin t}{t^2+1}\right) dt$

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} 1 + \int_{-2}^{2} \frac{\sin t}{t^2+1} \rightarrow \int_{-a}^{a} \text{odd} = 0$

$1*(2+2) + \int_{-2}^{2} \frac{\sin(-t)}{(-t)^2+1} \rightarrow \int_{-2}^{2} -\frac{\sin t}{t^2+1}$

$4 + 0 = \boxed{4}$

Q14) $\frac{d}{dx} \int_{2}^{x^2} \frac{dt}{t^2+1} \Rightarrow \frac{1}{(x^2)^2+1} * 2x - \frac{1}{(2)^2+1}(0)$

$= \boxed{\frac{2x}{x^4+1}}$

مکتبة خواطر

(Q15) $\int 2^x \cdot dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ ∴ $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a}$

طريقة ثانية

(Q16) $\int \tanh x \cdot dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot dx$

مشتقة احد أقسام تساوي البسط

$(\cosh x)' = \sinh x$

$\Rightarrow$

$\int \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot dx = \boxed{\ln|\cosh x| + C}$

(Q17) $\int \operatorname{sech}^2 x \, e^{2\tanh x} \cdot dx$

كل اقترن

$u = 2\tanh x$

$du = 2\operatorname{sech}^2 x \cdot dx$

$\frac{du}{2\operatorname{sech}^2 x} = dx$

$= \int \operatorname{sech}^2 x \, e^u \cdot \frac{du}{2\operatorname{sech}^2 x}$

$= \frac{1}{2} e^u + C = \boxed{\frac{1}{2} e^{2\tanh x} + C}$

(7)

مكتبة خواطر

P16/

If $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ مثال محلول

then $\int_c^1 \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$

كل اعتراض

$f(\text{المتغير})$

↓

المتغير $= u$

$\Rightarrow$ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow x\,du = dx$; $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow \int_1^0 \frac{f(u)}{x} x\,du = \int_1^0 f(u)\,du$ ∴ $\int_a^b f = -\int_b^a$

$\Rightarrow -\int_0^1 f(u)\,du = -4$

(8)

مكتبة خواطر

Q19
20

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Then f has inflection Point & local maximum at $x = ?$

$f(x)$ Concave $\boxed{x \text{ on}}$

$f''(x) = 0 \Leftarrow$ inflection

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6 = 0$

$(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$

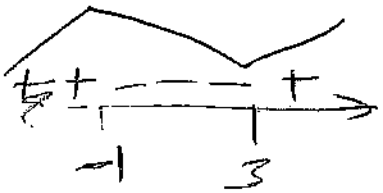
inflection $\boxed{x = 1}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 \quad , x = -1$



then max local at $\boxed{x = -1}$

مكتبة خواطر

Q21

The area region bounded by the Curve $y = x$, $y = x^2$

فايتال

سرحلك

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$

$$\int_0^1 x^2 - x$$

من مثالاً نعم

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ (سالب)

$$\int_1^0 x^2 - x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big]_1^0$$

صفا =

$$= \cancel{(0-0)} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{2-3}{6}\right) = -\left(\frac{-1}{6}\right) = \boxed{+\frac{1}{6}}$$

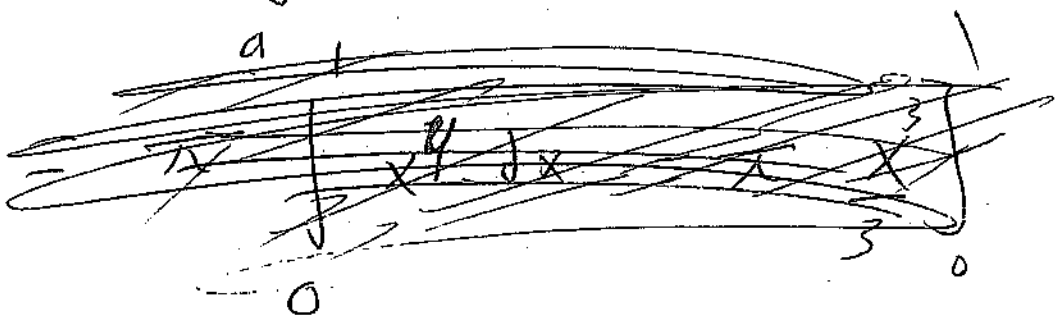
مكتبة خواطر

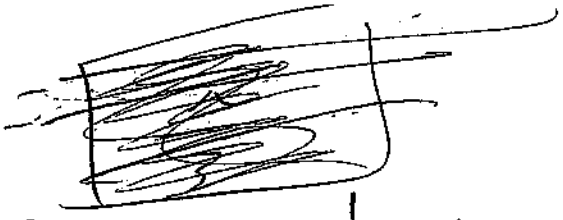
Q22) find the volume of the solid that result when revolving the region bounded by

$x=0$, $x=1$, $y=x^2$

& x-axis about the x-axis ?

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$





$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 \cdot dx = \pi \int_0^1 x^4 \cdot dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

(11)

مكتبة خواطر

The vertical asymptote

مثال

$$f(x) = \frac{2x-4}{|x|-2}$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

$x = 2$

$$\frac{2x-4}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$x = -2$

$$\frac{2x-4}{(-x)-2} = \frac{-4-4}{0} = \frac{-8}{0}$$

Then vertical

$$\boxed{x = -2}$$

مكتبة خواطر

فاينال

Q24) $\int \tanh 2x \operatorname{sech} 2x \, dx$

$= -\frac{\operatorname{sech} 2x}{2} + c$

Q25) $f(x) = e^{(x^3 - 12x)}$ Then the value of x at which the graph f has horizontal tangent?

$f'(x) = 0$ horizontal tangent يعني مماس أفقي

طلع قيم x

$f'(x) = (3x^2 - 12)\, e^{(x^3 - 12x)} = 0$

$e^{x^3 - 12x} \neq 0$, $3x^2 - 12 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

(15)

مكتبة خواطر

مثال سريع

(Q26) $\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x + x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$

$\sin\infty$
$\cos\infty$ Sqeeze.

$$1 \geq \sin\frac{1}{x} \geq -1$$

$$x^2 \geq x^2\sin\frac{1}{x} \geq -x^2$$

$$1+\cos x+x^2 \geq 1+\cos x + x^2\sin\frac{1}{x} \geq 1+\cos x - x^2$$

$$\lim_{x\to 0} 1+\cos x + x^2 \geq \lim_{x\to 0}\left(1+\cos x + x^2\sin\frac{1}{x}\right) \geq \lim_{x\to 0} 1+\cos x - x^2$$

$$\underbrace{1+1+0}_{2} \geq \lim_{x\to 0} 1+\cos x + x^2\sin\frac{1}{x} \geq \underbrace{1+1-0}_{2}$$

Then $\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x + x^2\sin\frac{1}{x}\right) = \boxed{2}$

مكتبة خواطر

Q27)

مثال کردہ

$$\int_0^1 (2x+1)^{10} \cdot dx$$

یعنی $\int (ax+b)^c$

$$= \frac{(ax+b)^{c+1}}{(c+1)\,a}$$

$$= \left[\frac{(2x+1)^{11}}{2(11)} \right]_0^1$$

$$\frac{(2(1)+1)^{11}}{22} - \frac{(1)^{11}}{22}$$

$$= \frac{3^{11}}{22} - \frac{1^{11}}{22} = \boxed{\frac{(3^{11}-1)}{22}}$$

(25)

مکتبۂ خواطر

(Q28) اختيار من متعدد

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}}$ Then the domain of f

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\ln x}} \longrightarrow R$

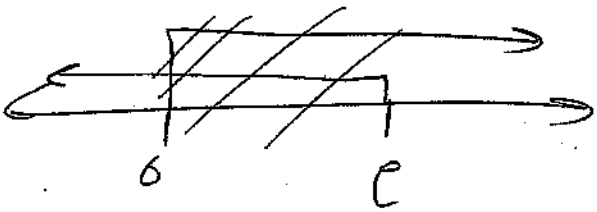
$2 - \ln x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \ln x$

$e^2 \geq x$

$\ln x \rightarrow x > 0$

$2 - \ln x \neq 0$

$2 \neq \ln x \Rightarrow e^2 \neq x$



$(0, e^2)$

مكتبة خواطر

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a				\	\		\		\	\	\	
b												\
c												
d												
e								\				

Choose the best correct answer (2.5 points each):

1) The range of the function $h(x) = 3x^2 + 6x + 10$

a) $[8, \infty)$ b) $[-7, \infty)$ c) $(7, \infty]$ d) $(-\infty, -7]$ e) none of these

2) $\log_5 \frac{1}{5} + \log_5 125 - \log_5 625 =$

a) -1 b) 0 c) 4 d) 2 e) none of these

3) The domain of the function $f(x) = \frac{\sqrt[5]{5x^2 - 22}}{\sqrt[2]{\sqrt[3]{x-1} - 3}}$ is

a) $(37, \infty]$ b) $(1, \infty)$

c) $(10, \infty)$ d) $(1, 6)$ e) none of these

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 121} - 11}{x^2} =$

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{22}$ e) none of these

5) the solution to the equation: $0.00001 = 0.1^x$ is $x =$

a) 5 b) -5 c) 2 d) 4 e) none of these

(H)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

6) $\cos\left(2\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)\right) =$

a) $\frac{119}{169}$ b) $\frac{12}{13}$ c) $\frac{120}{169}$ d) $\frac{60}{169}$ e) none of these

7) if $h(x) = \frac{8}{2x-3}$ then $h^{-1}(x)$ has a vertical asymptote

a) $x = 0$ b) $x = 4$

c) $x = \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{3}{2}$ e) none of these

8) $\log_{\frac{1}{7}} 343 - \frac{\ln(49)}{\ln(7)} =$

a) 5 b) -3 c) 3 d) -5 e) none of these

9) if $f(x) = 3\cos^{-1}(x) + 2\ln(e^{x^2}) + 2\log(x)$ then $f^{-1}(2) =$

a) 1 b) 10 c) 2 d) 3 e) none of these

10) the range of $f(x) = \cos^{-1}(x) + \csc(x)$ is

a) $(-\infty, \infty)$ b) $[-1, 1]$ c) $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ d) $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ e) $[0, \pi]$

11) the function $f(x) = \frac{5x+\sqrt[3]{100x^2+20}+\sqrt[3]{x}}{5x+82}$ has a horizontal asymptotes

a) $y = 3$ and $y = -1$ b) $y = -1$ and $x = \frac{3}{17}$

c) $y = 5$ and $y = \frac{-5}{3}$ d) $y = -1$ and $y = \frac{17}{3}$

e) none of these

12) One of the following mathematical formulas is not a function:

a) $x^2 + y = 81$ b) $y = \ln((x-1)^2)$

c) $y = \log(\sqrt[3]{x})$ d) $y = \ln(-(x-1)^2)$ e) none of these

(4)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

I/ choose the best correct answer (2.5 points each)

سكند عالم حمادي

1)if $f(x) = (x+2)(x^3-3)$ then $f'(0) =$

a) 3 b) 0 c) -2 d) -3 e)none of these

2)if $f(x) = \frac{\tan(x)}{1+2x}$ then $f'(0) =$

الالال ابن زيد

a) 3 b) 0 c)2 d) -2 e)none of these

3)the value of k that make $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2k, & x \geq 2 \\ 4k, & x < 2 \end{cases}$ continuous every where is $k =$

a) 3 b) 4 c)2 d)6 e)none of these

4)the function $f(x) = |3x-2| + 27$ is not differentiable at $x =$

a) $\frac{2}{3}$ b) 9 c)1.5 d)-1.5 e)none of these

5)the function $f(x) = [x] + 15$ is not continuous at $x =$

a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{12}{7}$ c) $\frac{147}{5}$ d) $\frac{127}{4}$ e)none of these

6)if $f(x) = \sinh(x)\sec(x)$ then $f'(0) =$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e)none of these

7)if $f(x) = xe^{-3x}$ then $f''(0) =$

a) -3 b) -10 c) 25 d)-15 e)none of these

(HH)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

8)if $\ln(y) + 2^x y = 0$ then $\frac{dy}{dx} =$

a) $\frac{\ln(2)y^2 2^x}{1+2^x y}$ b) $\frac{\log(0.5)y^2 2^x}{1+2^x y}$ c) $\frac{\ln(0.5)y^2 2^x}{1+2^x y}$ d) $\frac{\log(0.5)y^2 2^x}{1+2^{2x} y}$

e)none of these

9) if $f(x) = \tan^{-1}(5x)$ then $f''(x) =$

a) $\frac{-50x}{(1+25x^2)^2}$ b) $\frac{50x}{(1+25x^2)^2}$ c) $\frac{-250x}{(1+25x^2)^2}$ d) $\frac{-125x}{(1+25x^2)^2}$

e)none of these

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-x}{5x} =$

a) 0 b) 1 c)-0.2 d) $\frac{1}{5}$ e)none of these

11)if $y = \log_3 \sqrt[5]{x}$ then $\frac{dy}{dx} =$

a) $\frac{-1}{2\ln(3)x}$ b) $\frac{1}{2\log(3)x}$ c) $\frac{1}{\ln(3)x}$ d) $\frac{1}{2\ln(3)x}$ e)none of these

12)if $y = \cos^2(\frac{x}{2})$ then $\frac{dy}{dx} =$

a) $\frac{-\sin(x)}{2}$ b)$-2\sin(2x)$ c) $\frac{-\sin(2x)}{2}$ d) $\frac{-\sin(2x)}{4}$ e)none of these

(444)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

فاينال صايم حصادي

Choose the best correct answer (2 points each)

1 the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ is increasing on

a) $R - (-2,4)$ b) $(-2,4)$ c) $(-\infty,-2)$ d) $(4,\infty)$ e) none of these

2 the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ has a local maximum

a) 10 b) 66 c) -66 d) 90 e) none of these

3 the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ is concave up on

a) $(-\infty,-2)$ b) $(-\infty,2)$ c) $(4,\infty)$ d) $(2,\infty)$ e) none of these

4 the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ has an inflection point

a) [illegible] b) [illegible] c) [illegible] d) [illegible] e) none of these

5 [illegible] has a local maximum at $x =$

a) [illegible] b) [illegible] c) [illegible] d) [illegible] e) none of these

الامال ايمن زيود

6 if $f(x) = (2x+7)^5$ then $f'(x) =$

a) $10(2x+7)^4$ b) $10(2x+7)^5$ c) $10(2x+7)^6$ d) $10(2x+7)^7$ e) none of these

7 [illegible] b) [illegible] c) [illegible] d) [illegible] e) none of these

8 if $h(x) = \int_{-3}^{5x} \frac{2}{x}\,dt$ then $h'(x) =$

a) $\frac{1}{10x}$ b) $\frac{1}{2x}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{10}{x}$ e) none of these

9 if $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = 8$, $\int_{-3}^{5} g(x)\,dx = -10$ then $\int_{-3}^{5} (f+g)(x)\,dx =$

a) 18 b) -2 c) -18 d) 2 e) none of these

10 if $\int_{-3}^{5} \cos(\pi x)\,dx = a\int_{-3}^{5}$ then a) $\frac{1}{\pi}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\pi}{5}$ e) none of these

11 if $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = 5$, $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = -1$ then $2\int_{-3}^{5} f(x)\,dx =$

a) 8 b) 4 c) 16 d) 8 e) none of these

12 $\int_{-3}^{5} (4x+2)^5\,dx =$ a) [illegible] b) [illegible] c) [illegible] d) [illegible] e) none of these

(H H H)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

$\frac{1}{18}\ln(1+3x^2)+c$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\sin(x)}dx =$ a) $e^{\frac{\pi}{2}}$ b) $e-1$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) π e)n

15) $\int \frac{\log_3 x}{x}dx =$ a) $\frac{(\ln(x))}{2\ln(3)}+c$ b) $\frac{(\ln(x))^2}{2\ln(3)}+c$ c) $\frac{(\ln($
$\ln($

d) $\frac{(\ln(3x))^2}{2\ln(3)}+c$ e)none of these

16)the area bounded by the curve $y=\frac{x+1}{x^2+2x}$ and the lines $x=1$,

a)15 b) $\ln(5)-\ln(3)$ c) $\frac{1}{2}\ln(5)$ d)22 e)none of these

17)the volume of revolution the region bounded by $f(x)=5x$ and

And $x=2$ around the x axes is =

a) $\frac{200\pi}{3}$ b) $\frac{100\pi}{3}$ c) 200π d)200 e)none of these

18) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ a)π b)2π c) 3π d) $\frac{\pi}{4}$ e)none

19) if $2^{x+y}+2^x=20$ then $\frac{dy}{dx}=$

a) $(1+\frac{1}{y})$ b) $(1-\frac{1}{y})$ c) $-(1+\frac{1}{y})$ d) $-(1+\frac{2}{y})$ e)none of these

20) if $f(x)=\cos(2x)$ then $f^{13}(x)=$

a) 2 b)-2 c)1 d)0 e)-1

(HHH)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

Choose the best correct answer (2 points each)

1)the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ is increasing on

a) $R - (-2,4)$ b)$(-2,4)$ c)$(-\infty,-2)$ d)$(4,\infty)$ e)none of these

2)the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ has a local maximum=

a)56 b)66 c)-66 d)96 e)none of these

3)the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ is concave up on

a)$(-\infty,1)$ b)$(-\infty,-2)$ c)$(1,\infty)$ d)$(4,\infty)$ e)none of these

4)the function $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 10$ has an inflection point

a)(1,-54) b)(-2,66) c)(4,-160) d)(1,-42) e) none of these

5) the function $f(x) = x^3$ has a local maximum at $x =$

a) 0 b)10000 c) 1 d) 8 e)none of these

الاجابات
ايمن زعرور

6) if $g(x) = (2x + 7)^8$ then $g'(x) =$

a)$8(2x + 7)^7$ b) $7(2x + 7)^7$ c)$-8(2x + 7)^7$ d) $16(2x + 7)^7$ e)none of t

7)$\lim_{x\to 0} x\cot 2x =$ a) 2 b)-2 c)0.5 d)-0.5 e)none of these

8) if $h(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}\,dt$ then $h'(x) =$

a)$\frac{1}{\sqrt{x}}$ b)$\frac{1}{2x}$ c)$\frac{2}{x}$ d)$\frac{1}{x\sqrt{x}}$ e)none of these

9) if $\int_{-3}^{2} f(x)dx = 8$, $\int_{2}^{-3} g(x)dx = -10$ then $\int_{-3}^{2}(f+g)(x)dx =$

a)18 b)-2 c)-18 d)2 e)none of these

10) $\int_{\frac{-1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos(\pi x)\,dx =$ a)$\frac{\pi}{2}$ b)π c)$\frac{2}{\pi}$ d)$\frac{-\pi}{2}$ e)none of these

11) if $\int_2^3 f(x)dx = 5$, $\int_0^3 f(x)dx = -3$ then $2\int_0^2 f(x)dx =$

a) 8 b) 4 c) 16 d)-8 e)none of these

12)$\int_0^1 (4x + 2)^3 dx =$ a) 96 b)64 c)80 d)36 e)none of these

(HHH)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

21/25 v good

Test bank

سكندي السيد افاضي

The Hashemite University | Calculus I | Date 12-11-2012

Department of Mathematics | Second Exam | Time: One Hour

اسم الطالب: [redacted] الرقم الجامعي: [redacted] الرقم المتسلسل: [redacted]

وقت المحاضرة: 12—1 pm اسم المدرس: [redacted]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d

1) Let f and g be differentiable at x = 1, such that f(1) = 1, f'(1) = 2, g(1) = -2 and g'(1) = 4, then $\frac{d}{dx}(g(x)\sqrt{f(x)})\Big|_{x=1} =$

a) 5 b) 2 c) $-\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{2}$

الاجابات ايمن زعود

2) If f(2) = 1, g(x) = ln(x³ + 1), and (gof)'(2) = 6, then f'(2) =

a) 7 b) –3 c) 4 d) 8

3) The equation of the tangent line to the curve

f(x) = $\sin^2 x - x\cos x^2 + 3$ at x = 0 is given by

a) y= x+3 b) y= x–3 c) y= –x–3 d) y= –x+3

4) The critical point(s) of f(x) = $x + \frac{4}{x}$ is (are)

a) 0 only b) –2 and 0 and 2 c) -2 and 2 d) 2 only

Page "1"

(Test)

مكتبة خواطر

Calculas "1" Second exam

5) The values of k and m that make

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+x & ,x>1\\ kx-m & ,x\le 1\end{cases}$ differentiable at x=1 are:

a) k=0, m=-2 b) k=0, m=2

c) k=-1, m=2 d) k=1, m=2

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+7}\right)^{-2x}=$

a) e^4 b) e^6 c) e^8 d) e^{10}

7) The value of (c) such that the line $y=-x-4$, is tangent to the curve $y=c\sqrt{x}$

a) $c=-4$ b) $c=-2$ c) $c=2$ d) $c=4$

8) If $2x^2+y^2=2$, then $\frac{d^2y}{dx^2}=$

a) $-\frac{4}{y^3}$ b) $\frac{4}{y^3}$ c) $-\frac{6}{y^3}$ d) $\frac{6}{y^3}$

9) One of the following is an inflection point for $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

a) $(-1,\frac{1}{4})$ b) $(0,\frac{1}{3})$ c) $(1,\frac{4}{7})$ d) $(-2,\frac{4}{7})$

10) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ increasing in

a) $[-1,1]$ b) $[1,\infty)$ c) $(-\infty,0]$ d) $[0,\infty)$

11) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ concave down in

a) $[-1,1]$ b) $(-\infty,-1)U(1,\infty)$ c) $(-1,1)$ d) $[0,\infty)$

12) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ has absolute maximum at

a) $x=-1$ b) $x=0$ c) $x=1$ d) non of these

Page "2"

مكتبة خواطر

(Test)

سكند اضافي
حلول الامتحان
ضلف الصفحة

Select the best correct answer and fill it in the table above:

1) $\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-25}{h}=$

(a) 8 (b) 10 (c) 0 (d) doesn't exist

2) $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=$

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) doesn't exist

3) The horizontal asymptote(s) of $y=\frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$ is(are)

(a) $y=-2$ b) $y=2$ (c) $y=2, y=-2$ (d) doesn't exist

4) $\lim_{x\to-\infty} x^3-2x^2+7=$

(a) 0 (b) $-\infty$ (c) We can not compute this limit (d) ∞

5) Let $f(x)=e^{x^2}$. Then $f'(1)=$

a) 0 b) e c) doesn't exist d) $2e$

امين زيود

6) Let $f(x)=\sin^2 x$. Then $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) does not exist

7) Let $g(x)+\sin(xg(x))=x^2-2$. Note that $g(0)=-2$. Then $g'(0)=$

(a) 0 (b) -2 (c) 2 (d) doesn't exist

(Test)

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

8) $\cosh(\ln 3) =$

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{-4}{3}$ (c) 0 (d) $\frac{5}{3}$

9) Let $f(x) = 2^{\cosh(x)}$. Then $f'(0) =$

(a) 1 (b) 0 (c) $-\ln 2$ (d) $\ln 2$.

10) Let $f(x) = x\tan^{-1}(x)$. Then $f'(-1) =$

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ (c) 0 (d) $\frac{-1}{2}+\frac{-\pi}{4}$

11) Let $f(x) = \ln(x^2+3)$. Then $f'(1) =$

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) doesn't exist

12) Let $f(x) = (x+1)^x$. Then $f'(1) =$

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

حلول اسئلة الكتاب سالكولاس

9) $f(x) = 2^{\cosh(x)}$ $\quad f'(0)$

$f'(x) = \sinh x \cdot 2^{\cosh x} \cdot \ln 2 = \sinh(0) \cdot 2^{\cosh(0)} \cdot \ln 2 = 0$

zero

10) $f(x) = x \tan^{-1} x$ Then $f'(1) = ??$

$f'(x) = x \frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1} x \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1+1^2} + \tan^{-1}(1) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}$

11) ~~$f(x) = \ln(x^2+3)$ $\quad f'(1) = ??$~~

~~$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2(1)}{(1)^2+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$~~

فريق المحرك
Engine team

ii) $f(x) = \ln(x^2+3)$ $\quad f'(1) = ??$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2(1)}{(1)^2+3} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

12) $\ln f(x) = \ln(x+1)^x$, $f'(1)$ $\quad f(x) = (x+1)^x$

$f(1) = (1+1)^1 = \boxed{2}$

$\ln f(x) = x \ln(x+1)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{1}{x+1} + \ln x+1$

$\frac{f'(1)}{2} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} + \ln 1+1 \Rightarrow \frac{f'(1)}{2} = \frac{1}{2} + \ln 2$

$\Rightarrow f'(1) = \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) * 2 = 1 + 2\ln 2$

$= 1 + \ln(2)^2 = 1 + \ln 4$

فريق المحرك
Engine team

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر

حلول أسئلة الكتاب سالكولاس ٢

1) $\lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2-25}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2-(5)^2}{h}$

$f(x)=(x)^2$, $f'(x)\Big|_{x=5} \Rightarrow f'(x)=2x \quad f'(5)=10$

2) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{\infty}\right) = \sin(0) = 0$

3) $y = \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4}\sqrt{x^2}}{x} = \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4}\sqrt{x^2}}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$

$y=2$, $y=-2$

4) $\lim_{x\to-\infty} x^3-2x^2+7 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

أعلى رتبة
Engine term

5) $f(x)=e^{x^2}$ $\quad f'(1)=??$ $\quad f'(x)=2x\,e^{x^2} \Rightarrow f'(1)=2(1)e^{1^2}$

6) $f(x)=\sin^2 x$ $\quad f'(x)=2\sin x\cos x$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2}=1$

7) $g(x)+\sin(xg(x))=x^2-2$ $\quad g(0)=-2$ $\quad g'(0)$

$g'(x)+\left(xg'(x)+g(x)\right)\cos(xg(x))=2x$

$g'(0)+(0+(-2))\cos(0)=2(0)$

$g'(0)-2=0 \Rightarrow \boxed{g'(0)=2}$

8) $\cosh(\ln 3)=\frac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{2}=\frac{e^{\ln 3}+e^{\ln 3^{-1}}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$\ln a^b = b\ln a$

$3^{-1}=\frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

مكتبة خواطر