تقدم لجنة ElCoM الاكاديمية

دفترالميد لمادة:

تفاضل وتكامل (١)

من شرح:

د. رانيا شقبوعة

جزيل الشكر للطالبة:

لبنى عموش

Subject (Calculus) Date 17th Oct No.

بسم الله الرحمن الرحيم

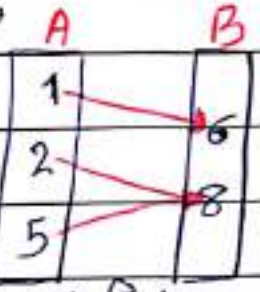
* Function * الاقتران

هو علاقة تربط بين مجموعتين

$f: A \longrightarrow B$

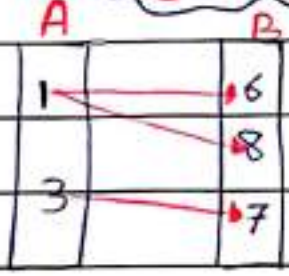
لـ يرتبط عنصر واحد فقط

$y = f(x)$



(f)

* Function * لأنه كل عنصر من A يرتبط بعنصر واحد من B *



* Relation * علاقة (not Function)

لأنه عنصر من A مرتبط بعنصرين من B *

A: Domain المجال

{1, 2, 5} (Input)

B: Range المدى

{6, 8} (Output)

* بالصور الاقتران f:

$f(1) = 6$

$f(2) = 8$

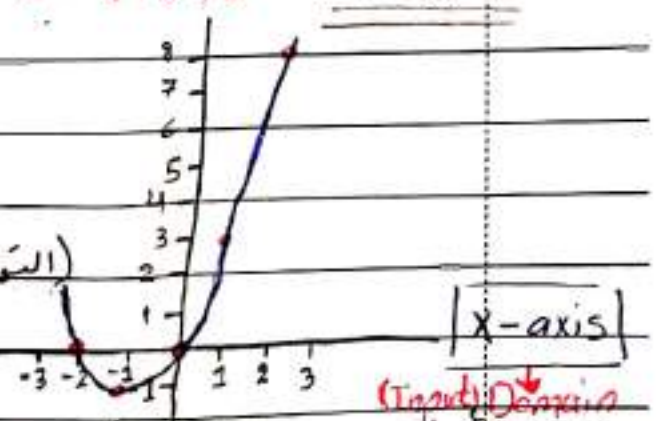
$f(5) = 8$

Ex: $f(x) = x^2 + 2x$ * Graph:

① نأخذ قيم لـ (x) ② نعوض في الاقتران

x	0	1	-1	2	-2
y=f(x)	0	3	-1	8	0

(x, y) → (0, 0) ، (1, 3) ، (-1, -1) ، (2, 8) ، (-2, 0) (الأزواج المرتبة)



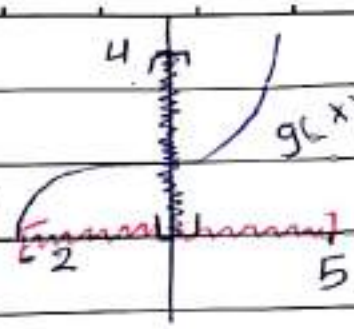
(التوصيل بالرسم من اليسار إلى اليمين)

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 17th. Oct No.

ex:



(x) Domain: [-2, 5]

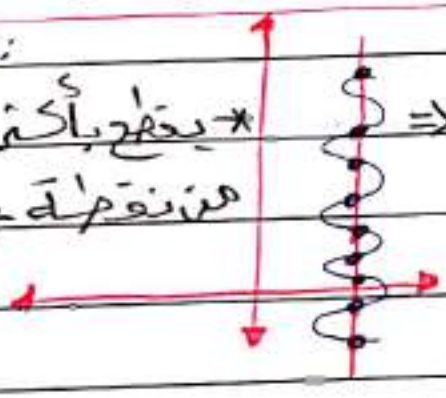
(y) Range: [0, 4]

* Vertical line Test : اختبار الخط العمودي

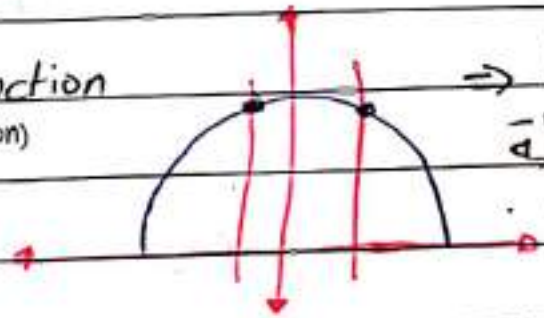
* يستخدم لمعرفة أي شكل هل هو اقتران أو علاقة

ex:

* يقطع بأكثر من نقطة

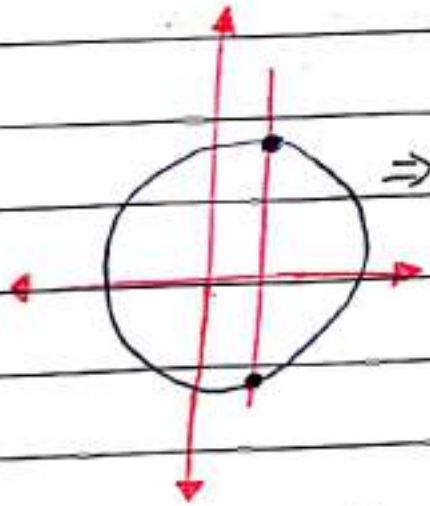


⇒ NOT Function (Relation)

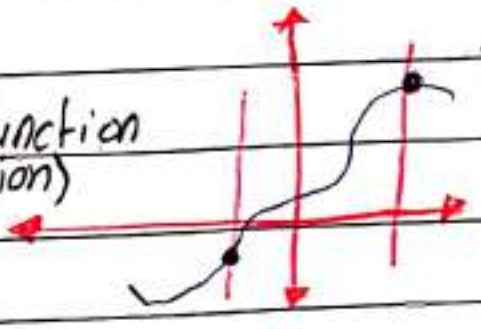


⇒ Function

* يقطع بنقطة واحدة.



⇒ NOT Function (Relation)



⇒ Function

Scanned with CamScanner

Subject Date 17th Oct No.

Types of function:

(*) Polynomials: $P(x) = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} \dots + a_1 x + a_0$

كثيرات الحدود. $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0 \in R$ (Real numbers)

n: Integer عدد صحيح موجب (الأس)

(*) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 10x - 1$ ✓ ⟶ poly

(*) $f(x) = x^2 + 10x - 1$ ✓ ⟶ poly quadratic function

كثير حدود من الدرجة الثانية

(*) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 10x^2 + 7$ X * ليس كثير حدود *

(*) $g(x) = x^{-2} + 10x$ X * ليس كثير حدود *

(*) $h(x) = \sqrt{3x+1}$ X * اقتران جذري * ليس كثير حدود *

(Root Function)

(*) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ X * اقتران نسبي * ليس كثير حدود *

(Rational Function)

(*) Absolute Value Function: $|f(x)|$

ex: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ⟶

* Domain: R
كل الأعداد الحقيقة

* Range: $[0, \infty]$

(-) Properties of Absolute Value:

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5. $|x| = a \longrightarrow x = \pm a$
6. $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
7. $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$

CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject

Date 17th. oct No.

*Ex: Find the value of x :

$|2x-1| < 7$

$-7 < 2x-1 < 7$ ← على حسب المتباينة رقم |6|

$+1 \quad +1 \quad +1$

$\Rightarrow \frac{-6}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \rightarrow -3 < x < 4$

$= (-3, 4)$

*Ex: $f(x) = |8-2x|$ piecewise Function?

نكتبها كما قترات متشعب ؟

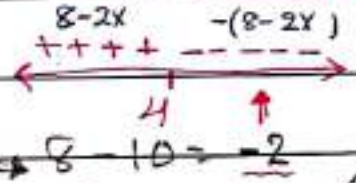
$8-2x = 0$

$2x = 8$

$|x = 4|$

① نساوي بالصفر

② على خط الاعداد ناخذ عدد أكبر وعدد أصغر لتحديد الإشارة.



$5 \rightarrow 8-10 = -2$

$0 \rightarrow 8$

* طريقة ثانية لتحديد الإشارة : لو كان امقترن حطي بشوف إشارة معامل x على أي من العدد وعكس الإشارة ← على يسار العدد

$$f(x) = \begin{cases} 8-2x, & x \leq 4 \\ -8+2x, & x > 4 \end{cases}$$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 17th oct No.

* قواعد أساسية لإيجاد المجال:

* Domain $y = f(x)$ — المجال: جميع قيم x اللي وسموح أتعوض فيها بالمتغير x

Input

* أغلب الـ Domain تحت وظلة $\mathbb{R}$ Real numbers

* نكون بالاستثناء لحالات خاصة سنتعلمها لاحقاً:
* القسمة على صفر.

① $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 \rightarrow D_f = R$

- Domain (poly) = R

② $g(x) = |poly| \rightarrow D = R$

Ex: $g(x) = |x^2 + 5x - 7| \rightarrow D = R$

③ $g(x) = \frac{10}{x-5} \rightarrow \neq 0$ * نستثني أصفار المقام

$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

$D = R - \{5\}$

④ $g(x) \sqrt[n]{f(x)}$, n even 2, 4, 6, ...

$\rightarrow \geq 0$

Ex: $f(x) = \sqrt{x-7} \Rightarrow x - 7 \geq 0$

$D_f = [7, \infty)$ $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

<-- [----- x

⑤ $g(x) = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow$ n odd 3, 5, 7, ...

$D_g = D_f$ (يعني بحسب Domain داخل الجذر وبنسى وجود الجذر)

Ex: $g(x) \sqrt[3]{\frac{1}{x+5}} \rightarrow$ Domain $\left(\frac{1}{x+5}\right)$

$x + 5 = 0 \quad x = -5$

$D_g = R - \{-5\}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 17th. Oct No.

⑥ $f(x) = \frac{x^2}{x}$ * فقط بوضع أصفار المقام *

Don't Simplify

بعد إيجاد الأصفار يجب أن نشترط: $X=0 \Rightarrow R-\{0\}$

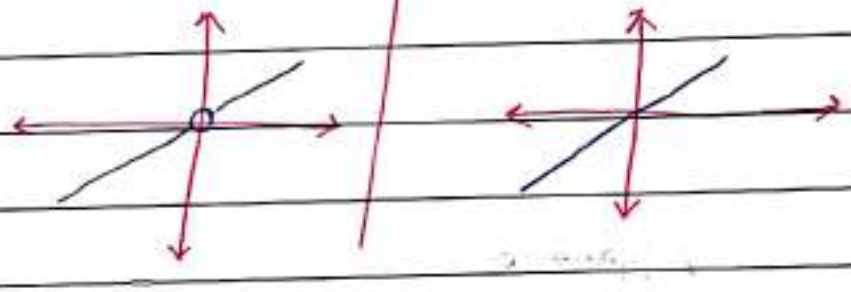
$\Rightarrow f(x) = X \quad , X \neq 0$

وهم كتابتها

لـ لأنه تختلف كلياً عن $F(x) = X$

توضيح ⟸

$f(x) = x, x \neq 0$ | $f(x) = x$



Scanned with CamScanner

Subject

Date 17th. oct No.

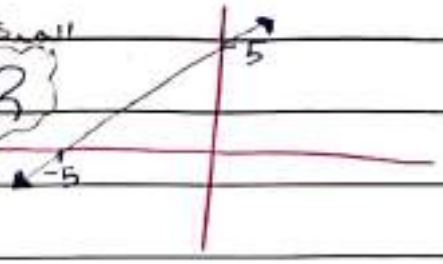
*Range : هي مجموعة قيم الصادات Output

بالدومين Domain

$y = f(x)$

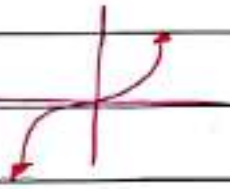
① $f(x) = x + 5$ الرسم

$D_f = R \Longrightarrow (R)$



② $f(x) = x^3$ الرسم

$D_f = R \Longrightarrow (R)$



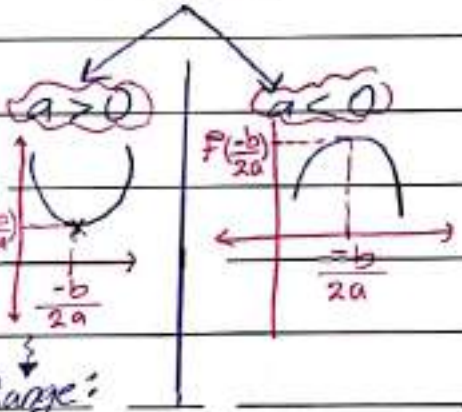
③ $f(x) = ax^2 + bx + c$

يعتمد الحل على إشارة a معامل x^2

- للاقتران التربيعي :

Domain → R

Range → ??



* الرأس : $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Range: $(-\infty, f(\frac{-b}{2a})]$

Range:

$[f(\frac{-b}{2a}), \infty)$

⇒ Ex: Range $f(x) = x^2 + 6x - 1$

$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

$f(-3) = (-3)^2 + 6 \times -3 - 1 = -9 - 1 = -10$

Range → $[-10, \infty)$

CRAFT NOTEBOOK

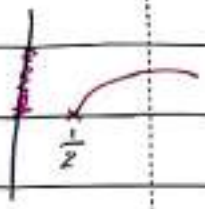
Scanned with CamScanner

Subject

Date 17th Oct No.

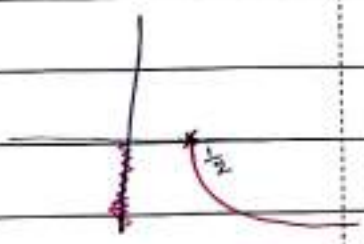
* $f(x) = \sqrt{2x-1}$

↳ Range $[0, \infty)$



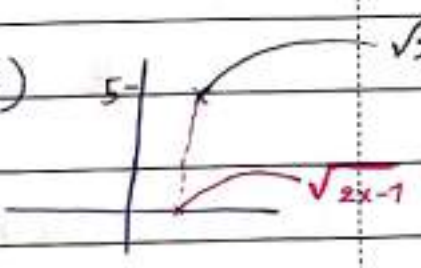
* $f(x) = -\sqrt{2x-1}$

↳ $(-\infty, 0]$



* $f(x) = \sqrt{2x-1} + 5$

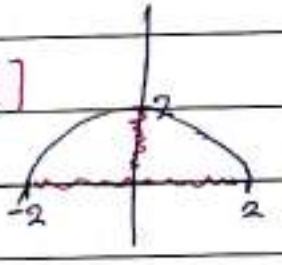
↳ Range $[5, \infty)$



* $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ * semicircle نصف دائرة

Df : $[-2, 2]$

Range : $[0, 2]$



* $f(x) = \sqrt{a-x^2}$ $a \in R$

↳ Domain $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

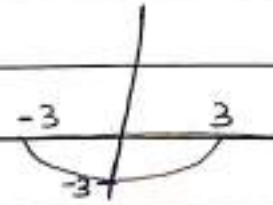
↳ Range $[0, \sqrt{a}]$

* $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$

$\sqrt{9} = 3$

Range : $[-3, 0]$

$9 - x^2 \geq 0 \implies [-3, 3]$



CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21th Oct No.

* New functions from old:

f, g →
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

f, g - اختيارين ينتج عنهم 6 new functions.
$f+g$ / $f-g$, $g-f$ / fg / $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$

Ex: $f(x) = 1-\sqrt{x-2}$, $g(x) = x-4$

① $(f+g)(7) = f(7) + g(7)$
$= 1-\sqrt{7-2} + 7-4 = 1-\sqrt{5}+3 = 4-\sqrt{5}$

② $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$= 1-\sqrt{x-2} - (x-4) = 1-\sqrt{x-2} - x + 4 = 5-x-\sqrt{x-2}$

③ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-4}$

* $f, g \longrightarrow$ Domain $(f+g, f-g, fg) = D_f \cap D_g$
Domain $\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g - \{x : g(x)=0\}$
لما استثناء أصفار المقام

Ex: $f(x) = 1-\sqrt{x-2}$ $g(x) = x-4$ $D_f = x-2 \geq 0$

① Domain $(fg)(x) \longrightarrow D_f \cap D_g$ $x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, \infty)$
$= [2, \infty) \cap \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}$
$= [2, \infty)$

CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject Date 21th. Oct No.

(2) Domain $(\frac{g}{f})(x) \longrightarrow D_f \cap D_g - \{x : f(x)=0\}$

$\therefore D(\frac{g}{f})(x) = [2,\infty) - \{3\}$
$= [2,3) \cup (3,\infty)$

$f(x) = 0$
$\Rightarrow 1 - \sqrt{x-2} = 0$
$= 1 = \sqrt{x-2}$ ^2 تربيع
$1 = x-2$
$x = 3$

* Fx: find the domain:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-4}} \Rightarrow \geq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2-4}{x-4} \geq 0$

(*) $x^2 - 4 = 0$ ابسط
$x = \pm 2$

(*) $x - 4 = 0$ المقام
$x = 4$

(±) $\frac{x^2-4}{x-4}$ ابسط / المقام

نفس عكس نفس
++ | -- | - | ++
-2 2 4

* الأطراف نفس إشارة x^2 والمنتصف عكس

-2 ✓ 2 4 ✓

المناطق الموجبة تمثل Domain الـ

$\therefore D_f = [-2,2] \cup (4,\infty)$

2) $f(x) = \sqrt{|x-1|-4} + \frac{\sqrt{2x-1}}{3-x}$

$\Rightarrow \sqrt{|x-1|-4}$

$\Rightarrow |x-1|-4 \geq 0$

$|x-1| \geq 4$ — or → $x-1 \geq 4$ / $x-1 \leq -4$

$\Rightarrow x \geq 5 \; , \; x \leq -3$

$[5,\infty) \cup (-\infty,-3]$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2x-1}}{3-x \rightarrow R} \rightsquigarrow 2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1$
$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ $[\frac{1}{2},\infty)$

$[\frac{1}{2},\infty) \cap R - \{3-|x|=0\}$

$[\frac{1}{2},\infty)$

$3 = |x|$
$x = \pm 3$

$[\frac{1}{2},\infty) - \{\pm 3\}$

$[5,\infty) \cup (-\infty,-3] \cap [\frac{1}{2},\infty) - \{\pm 3\}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21th. Oct No.

$\Rightarrow [5,\infty) \cup (-\infty,3] \cap [\frac{1}{2},\infty) - \{+3\}$

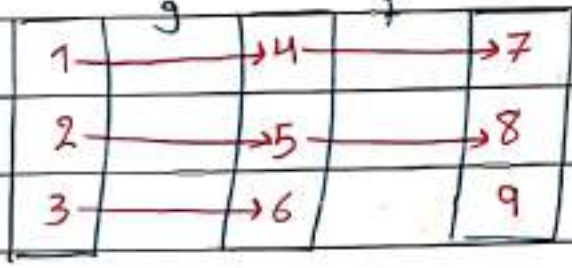
المنطقة اللي تلونت باللون هي Domain

$D_f = [5,\infty)$

Composition of functions

$(fog)(x) = f(g(x))$ (2) (1)

$(gof)(x) = g(f(x))$ (2) (1)



$(fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 7$

$(fog)(2) = f(g(2)) = f(5) = 8$

$(fog)(3) \rightarrow f(g(3)) = f(6)$

$\notin D_{fog}$

لحد هنا الصورة.

$\because 6 \notin D_f$ (undefined)

$D_{fog} = \{1,2\}$ ، $D_f = \{4,5\}$

وجدناها من $D_g = \{1,2,3\}$

* $D_{fog} = \{x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f\}$

* $D_{gof} = \{x \in D_f \ \& \ f(x) \in D_g\}$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th. Oct No.

* Ex: $f(x) = x^2 - 1$ $\quad g(x) = \sqrt{3-x}$

① $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(\sqrt{3-(-1)}) = f(2) = 2^2 - 1 = 3$

② $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2-1) = \sqrt{3-(x^2-1)}$
$= \sqrt{3-x^2+1} = \sqrt{4-x^2}$

③ $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3-x}) = (\sqrt{3-x})^2 - 1$
$= 3 - x - 1 = 2 - x$

$\therefore gof \neq fog$

→ D_f , D_g , D_{fog} , D_{gof} ?

D_f ↓ R

D_g ↓ $3-x \geq 0$

$3 \geq x \rightarrow (-\infty, 3]$

$D_{fog} = \{ x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f \}$

$= \{ x \in (-\infty, 3] \ \& \ \sqrt{3-x} \in R \}$

True لأنه $x \in (-\infty, 3]$

لـ x داخلة تنتمي لها في .

وهاي القيم داخلة تنتمي إلى R

$\therefore D_{fog} = (-\infty, 3]$

$D_{gof} = \{ x \in D_f \ \& \ f(x) \in D_g \}$

$\{ x \in R \ \& \ x^2 - 1 \in (-\infty, 3] \}$ → $x^2 - 1 \in (-\infty, 3]$

$\{ x \in R \cap x \in [-2, 2] \}$ → $x^2 - 1 \leq 3$

$\therefore D_{gof} = [-2, 2]$ → $x^2 - 4 \leq 0$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$x \in [-2, 2]$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21th-Oct No.

Ex: $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$

Find domain fog & gof ?

$D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{1\}$

$D_{fog} = \{ x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f \}$

$= \{ x \in R - \{1\} \ \& \ \frac{x}{1-x} \in R - \{1\} \}$

$= \{ x \in R - \{1\} \cap x \in R - \{\frac{1}{2}\} \}$

$\frac{x}{1-x} \in R - \{1\}$

$\frac{x}{1-x} \neq 1$

* يساوي لا تتران + ونضم نستثني العدد الثاني

$\frac{x}{1-x} \times 1$

$x = 1 - x$

$2x = 1 \quad x = \frac{1}{2}$

$\therefore x \in R - \{\frac{1}{2}\}$

$D_{fog} = R - \{\frac{1}{2}, 1\}$

$D_{gof} = \{ x \in D_f \ \& \ f(x) \in D_g \}$

$= \{ x \in R - 1 \ \& \ \frac{1+x}{1-x} \in R - \{1\} \}$

$= \{ x \in R - \{1\} \cap x \in R - \{0\} \}$

$\frac{1+x}{1-x} \in R - \{1\}$

$D_{gof} = R - \{1, 0\}$

$\frac{1+x}{1-x} \neq 1$

$\frac{1+x}{1-x} \times 1$

$1 + x = 1 - x$

$2x = 0$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th. Oct No.

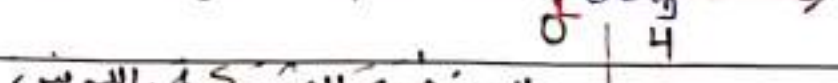
Ex: Find the domain $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}}$ اوجد مجال الدالة

$x \geq 0$ & $2-\sqrt{x} \geq 0$

$[0,\infty) \cap x \in (-\infty, 4]$

* دائماً الجزء الأول ما يه مشكلة بنزل زي هو
* الجزء اللي فيه جذر هو مشكل

* بلاقي التقاطع مع خط الأعداد



المنطقة المشتركة باللون البني هي الـ Domain

$2-\sqrt{x} \geq 0$

$2-\sqrt{x}=0$

$2=\sqrt{x}\ ^2$

$x=4$

* بوخذ [ ] ---> [ ] 4

رقم أكبر (-1) $9 \Rightarrow 2-\sqrt{9}=2-3=-1$

وأصغر (0) $1 \Rightarrow 2-\sqrt{1}=2-1=1$

[ ] عادي

$D_f=[0,4]$ input

لأنه قدرنا نخلي $\sqrt{2-\sqrt{x}}$

أحد الإشارة

Ex: $(fog)(x)=x^2+6x+6$ $g(x)=x+1$

Find $f(x)$

$(fog)=f(g(x))=x^2+6x+6$

$=f(x+1)=x^2+6x+6$

$f(y)=(y-1)^2+6(y-1)+6$

السؤال بيه x وفقط بتاعي أنا عندي x+1 فبساويه بمتغيرتاي

$y=x+1$

$x=y-1$

كل x بالبقران بجوهن مكانها y-1

Find $f(2)$??

① $f(2)=(2-1)^2+6(2-1)+6$

$=13$ ✓

OR

② $f(x+1)=(x)^2+6(x)+6$ ⇝ $x+1=2$

$x=1$

$f(1+1)=1^2+6\times1+6$

$f(2)=1+6+6=13$ ✓

وبعوض بالـ x

Subject

Date 21/11/21 No.

$(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3x + 2$

$f(1) = 3x + 5$ Find $g(x)$??

$f(g(x)) = 3x^2 + 3x + 2$

نعوضها بالقانون

$3g(x) + 5 = 3x^2 + 3x + 2$

$3g(x) = 3x^2 + 3x - 3$ $\div 3$

$g(x) = x^2 + x - 1$

Find $g(2)$

$g(2) = 4 + 2 - 1 = 5$

Subject Date 21th. Oct No.

Even and odd function

$f(-x)$ → $f(-x) = f(x)$ Even $[|x|, x^2, x^4, x^6 \dots]$

Ex: $f(x) = x^2$ → even

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(-2) = f(2) = 4$

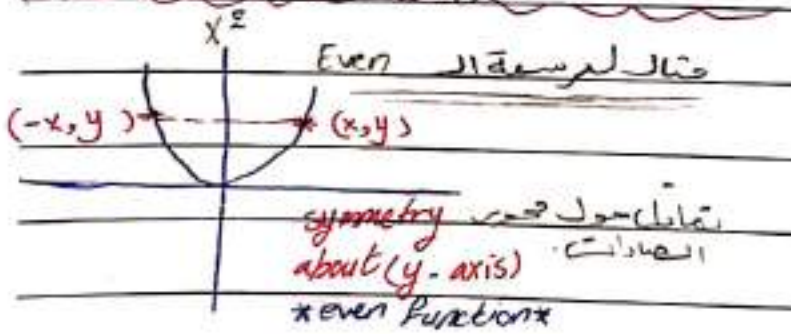
→ $f(-x) = -f(x)$ odd $[x, x^3, x^5, x^7 \dots]$

Ex: $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

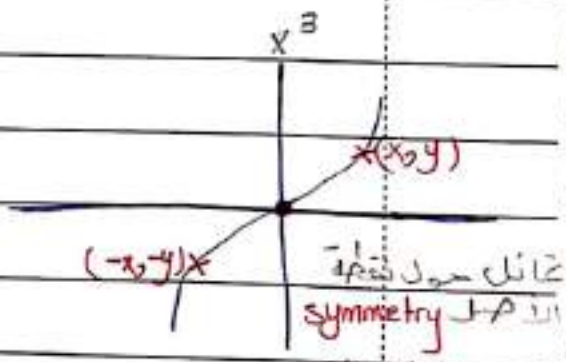
$f(-2) = -8$?
$f(2) = 8$ } حتى لما يكون عندنا نكون مختلفين بالإشارة.

→ $f(-x) \neq f(x)$ Not even
$f(-x) \neq -f(x)$ Not odd Neither



Even مثال للرسمة ال

symmetry متماثل حول محور الصادات
about (y-axis)
even Function



مثال لرسمة ال

متماثل حول نقطة الأصل symmetry
about (the origin)
odd Function

Subject Date 21th. oct No.

Ex: even, odd, neither ?? كيف نميز

1) $f(x) = 1 - x^4$ — Even ∴ نفس الاكس بالاوس زوجي

$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4$ [Even ∞]

2) $f(x) = x^5 + x$ — Not Even

$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$ [odd]

3) $f(x) = 2x - x^2$ — Not Even . Not odd.

$f(-x) = 2(-x) - (-x^2) = -2x - x^2 \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

[Neither]

4) $f(x) = \frac{x^5 + x}{1 - x^4}$ (odd / Even) ⟹ = odd

* ÷	Even (+)	odd (−)
Even (+)	Even	Odd
odd (−)	Odd	Even

OR

$f(-x) = \frac{(-x)^5 + (-x)}{1 - (-x)^4} \neq f(x)$

$\hookrightarrow \frac{-x^5 - x}{1 - x^4}$ نسحب إشارة السالب إلى أمام البسط

$= -\left(\frac{x^5 + x}{1 - x^4}\right) = -f(x)$

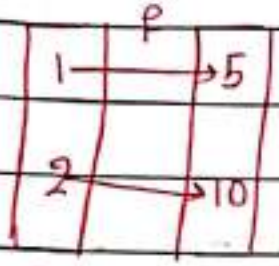
∴ Odd ✱

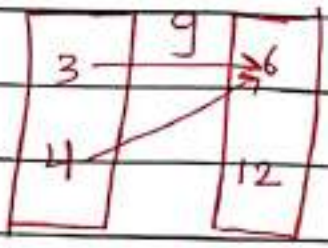
Subject

Date 24th. Oct No.

One - One Function

* A function f is called a 1-1 function if it never takes on the same value twice. That is $f(x_1) \neq$ whenever $x_1 \neq x_2$





$f(1) = 5$

$f(2) = 10$

1-1

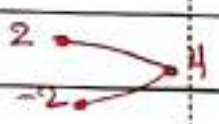
$g(3) = 6$

$g(4) = 6$ $\quad 3 \neq 4$

Not 1-1

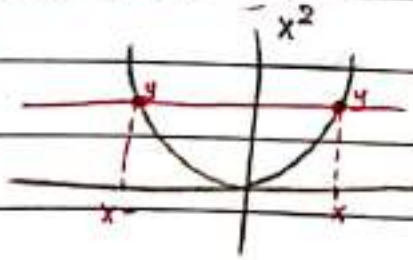
Ex: $f(x) = x^2$ Not 1-1

↳ $f(-2) = f(2) = 4$ $\quad 2 \neq -2$



* يعرف إذا الاقتران 1-1 بالرسم عن طريق اختبار الخط الأفقي Horizontal line

Test:



إذا يقطع منا كثر من نقطة يكون Not 1-1

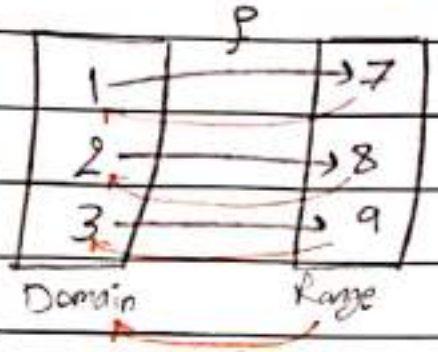
قطع بنقطة واحدة

1-1 ∴

Subject

Date 24th . Oct No.

Inverse Function :



$f(1) = 7$ $\quad f^{-1}(7) = 1$

$f(2) = 8$

$f(3) = 9$ $\quad f^{-1}(8) = 2$

$f^{-1}(9) = 3$

* توضيح : رمينا الـ Range بالاقتران الاصلي (f)
رمينا لعكسه Domain والعكس بالعكس (f^{-1})

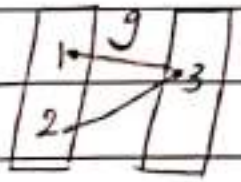
$D(f) \{1, 2, 3\}$ $\quad Range(f) \{7, 8, 9\}$

$D(f^{-1}) \{7, 8, 9\}$ $\quad Range(f^{-1}) \{1, 2, 3\}$

Thm : $D_f = Range\ f^{-1}$

$D_{f^{-1}} = Range\ f$

* معكل الاقترانات بقدر أوجدلها الـ Inverse



$g(1) = 3$

$g(2) = 3$

Not 1-1 $\quad g^{-1}$؟

هل صحيحا أم لا؟

= حاربين الاقتران يكون إله صورتين

يعني حافي إله g^{-1} لذلك Not 1-1

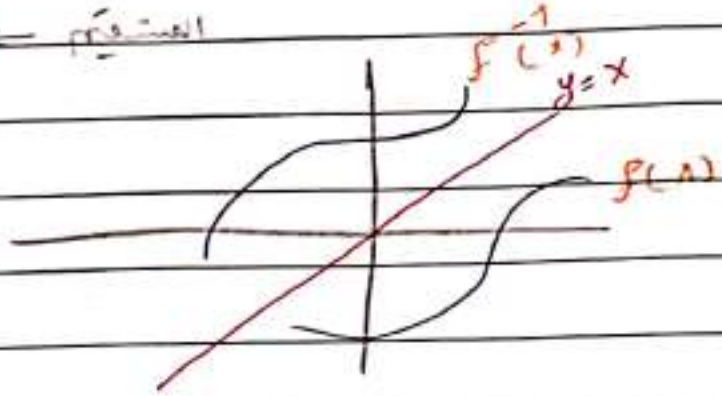
Thm : A function f has an inverse if it is 1-1

يعني اقتران 1-1 أكيد إله inverse

Subject

Date 24/11/21 No.

* علاقة الاقتران f بالاقتران f^{-1} و f^{-1} علاقة انعكاس حول المستقيم $y = x$



* Find $f^{-1}(x)$??

- نكتب الاقتران على شكل معادلة ونبدل x بـ y وبالعكس القانون
- نكتبه بدلالة $f^{-1}(x)$ ونكتب كل y بدلالة x

① $f(x) = 5x^3 + 7$

$y = 5x^3 + 7$

$5x^3 = y - 7 \quad \div 5$

$x^3 = \frac{y-7}{5} \quad \sqrt[3]{\ }$ حذر تقويمي

$x = \left(\frac{y-7}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-7}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

② $f(x) = \sqrt[5]{2x-1}$

$y = (2x-1)^{\frac{1}{5}} \quad ^5$

$y^5 = 2x - 1$

$2x = y^5 + 1 \quad \div 2$

$x = \frac{y^5+1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^5+1}{2}$

Subject Date 24th Oct No.

*Ex: $f(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$ | Find D_f, $f^{-1}(x)$, Range f ??

↳ مقام الكسر

1) $D_f \Rightarrow 2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ * $D_f = R - \{\frac{1}{2}\}$

2) $f^{-1}(x) \Rightarrow y = \frac{3x+5}{2x-1} = 3x+5 = 2xy-y$

$= 2xy-3x = y+5$

$= x(2y-3) = y+5$

$\frac{2y-3}{2y-3} \quad \frac{2y-3}{2y-3}$

$\Rightarrow x = \frac{y+5}{2y-3}$

$= f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2x-3}$

3) Range f = Domain f^{-1} $= \frac{x+5}{2x-3} \rightarrow 2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Range f = Domain $f^{-1} = R - \{\frac{3}{2}\}$

* Restricting Domain: لما يطلب f^{-1} لدقتران مش 1-1

(اقتطاع من الـ Domain)

$f(x) = x^2$ ~~Find $f^{-1}(x)$~~ x^2 not 1-1

الطريقة الصحيحة $f(x) = x^2$, $x \le 0$ Find $f^{-1}(x)$ ؟

$y = x^2 \rightarrow \sqrt{}$

$\sqrt{y} = \ominus x$

نأخذ بالسالب لأن $x \le 0$

$x = -\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$f(x) = x^2, x \le 0$ (1-1) ← توضيح الاقتطاع

Subject Date 24th. Oct No.

Ex : $f(x) = 3x^2 + 6x - 6$, $x \geq -1$

$y = 3x^2 + 6x - 6 \div 3$ x عزلنا أحلي المعادلة

$\frac{y}{3} = x^2 + 2x - 2$ بقسمة x مع أعلى إشارة صحيح

① معامل x^2 ⇐ (1)

$\frac{y}{3} + 1 = (x^2 + 2x + 1) - 2$ (1) = $(\frac{2}{2})^2$ ← $(\frac{b}{2})^2$ + ⑤

أجنبي ↓ أجنبي

$\frac{y}{3} + 1 = (x + 1)^2 - 2$

$+2 \quad +2$

$\frac{y}{3} + 3 = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{}$

$\sqrt{\frac{y}{3} + 3} = x + 1$ أخذت الجذر التربيعي

$-1 \quad -1$ لأنه عندنا بأسئلة x

$x = \sqrt{\frac{y}{3} + 3} - 1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3} + 3} - 1$ ※

Ex : $f(x) = x^3 + 5x - 2$ Find $f^{-1}(4)$?

بساويها مباشرة بالاقتران

$4 = x^3 + 5x - 2$

$x^3 + 5x - 6 = 0$ ← { $\pm 1 / \pm 2 / \pm 3 / \pm 6$

$f^{-1}(4) = 1$ $1^3 + 5(1) - 6 = 0$ ✓

$f(1) = 1^3 + 5 - 2 = 4$ ※

Subject Date 26th. Oct No.

لكي يكون الدالة inverse يجب أن يساوي $fog + gof$

Thm 3: $(fof^{-1})(x) = x \quad , \forall x \in Df^{-1}$

$(f^{-1}of)(x) = x \quad , \forall x \in Df$

Ex: Determine whether f & g are inverse functions:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad , \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$

$f(x) = (x+1)^3$ حيث استخدم القوسين

$(fog)(x) = x$?

$(gof)(x) = x$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}} - 1) = (x^{\frac{1}{3}} - 1 + 1)^3 = x$ ✓

$(gof)(x) = g(f(x)) = g((x+1)^3) = ((x+1)^3)^{\frac{1}{3}} - 1 = x + 1 - 1 = x$ ✓

$\therefore f, g$ are inverse functions

→ Sol 2:

$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$

$g(x) = y \Rightarrow g^{-1}(x) = f(x)$

CRAFT NOTEBOOK

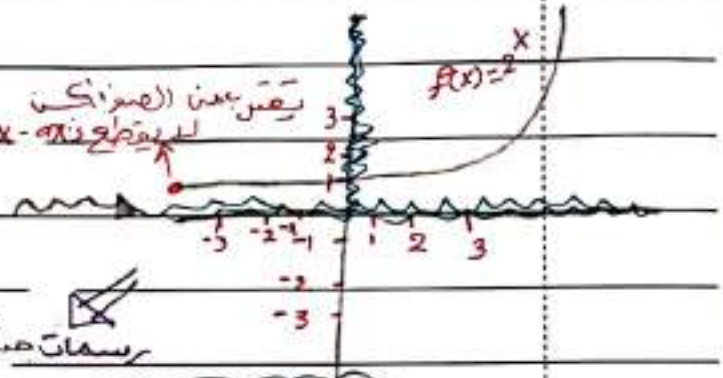
Subject Date 26th Oct No.

* Exponential function: الاقتران الأسي

$f(x) = b^x$, $b > 0$ and $b \neq 1$

Ex: $f(x) = 2^x$

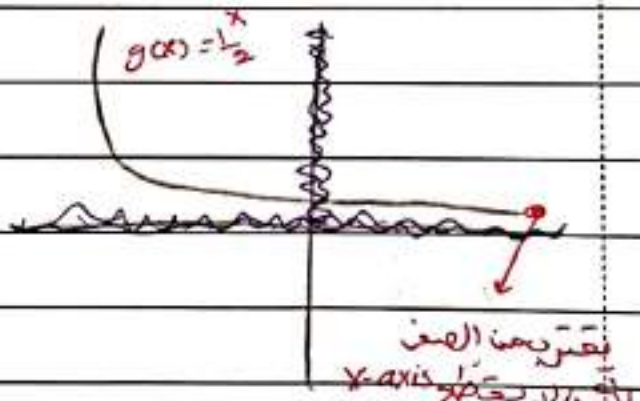
x	2^x	
0	$2^0 = 1$	(0, 1)
2	$2^2 = 4$	(2, 4)
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2})$



رسمات مشابهة:

$3^x, 4^x, 5^x, e^x$ Domain: R

$b^x, b > 1$ Range: $(0, \infty)$



$3^{-x} \leftarrow (\frac{1}{3})^x$ ~~e^{-x}~~

$b^x \quad 0 < b < 1$

* The natural exponential function:

$f(x) = e^x$ $e \approx 2.718\ldots$ العدد النيبري

Domain: R Range: $(0, \infty)$

$f(2) = e^2$

$f(0) = e^0 = 1$

Subject Date 26 Mh. Oct No.

Find the domain:

① $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-9}}$ → R

$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \quad x = \pm 3$

(+ | − | +) at −3, 3

$D_f = (-\infty, 3] \cup [3, \infty)$

② $f(x) = \frac{1}{e^{e^x}}$ → $(e^x)^2 = e^x * e^x$

$e^x - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^x(1 - e^x) = 0$

$e^x \neq 0 \quad / \quad 1 - e^x = 0 \quad = 1 = e^x$

$(0, \infty)$ Range کا ہے ↵ $x = 0 \quad (e^0 = 1)$

$D_f = R - \{0\}$

③ $f(x) = \sqrt{1 - 2^x}$

$1 - 2^x \geq 0 \quad 1 - 2^x = 0 \quad 1 = 2^x \Rightarrow x = 0$

(+ + +) − − − at 0

$1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ← −1 0 1 → $1 - 2^1 = -1$

$D_f = (-\infty, 0)$

Logarithmic functions:

$f(x) = \log_b x$, $b>0$ and $b \neq 1$

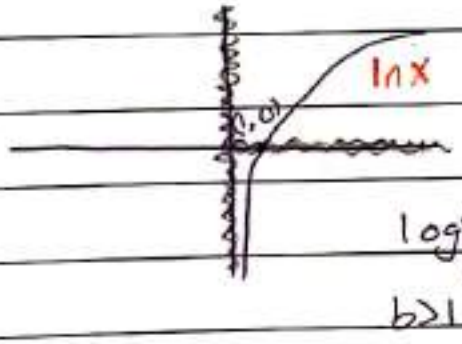
Ex ⇒ $\log_2 8 = 3 \Rightarrow (2^3 = 8)$

$\log_9 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow (9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3)$

$\log_{10} \frac{1}{1000} = -3 \Rightarrow (10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000})$

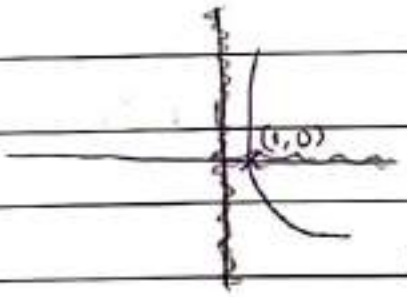
$\log_{12} 12 = 1 \Rightarrow (12^1 = 12)$ { $\log_b b = 1$ }

$\log_2 1 = 0 \Rightarrow (2^0 = 1)$ { $\log_b 1 = 0$ }



b>1

lnx / $\log_3 x$ / $\log_2 x$ ...



0<b<1

$\log_{\frac{1}{2}} x$ / $\log_{\frac{1}{3}} x$ ...

Domain: $(0, \infty)$

Range: R

* The natural log function:

$\log_e x = \ln x$ Domain: $(0, \infty)$ / Range: R

Note: $\log x = \log_{10} x$

يعني لو ما حطيت أساس
رح أعرف إنه الأساس 10

Subject

Date 26th. Oct No.

*Algebric propositions of log:

$b>0 \quad b\neq 1 \quad , \quad a,c>0 \quad r\in R$

1) $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

2) $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

3) $\log\left(\frac{1}{c}\right) = -\log_b c \longrightarrow (\log_b 1 - \log_b c)$

4) $\log_b a^{(r)} = r\log_b a$

5) $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ ← أنا بختار الأساس اللي بديح إياه

ex: $\log_{1000} 100 = \frac{\log 100}{\log 1000} = \frac{2}{3}$ ← أخترت الأساس 10

$\log_7 2 = \frac{\ln 2}{\ln 7}$

6) $\log_b b = 1$

7) $\ln e = 1 \quad (\log_e e = 1)$

8) $\log_b 1 = 0$

9) $\ln 1 = 0 \quad (\log_e 1 = 0)$

Subject Date 26th. Oct No.

* Simplify :

1) $\log\left(\frac{xy^5}{\sqrt{z}}\right)$

$= \log(xy^5) - \log\sqrt{z}$

$= \log x + \log y^{(5)} - \log z^{(\frac{1}{2})}$

$\log x + 5\log y - \frac{1}{2}\log z$

* Find the exact value

$(\log_2 6 - \log_2 15) + \log_2 20$

$(\log_2 \frac{6}{15} + \log_2 20)$

$\log_2(\frac{6^2}{15} \times 20^{11})$

$= \log_2 8 = 3$

* Find the domain :

1) $f(x) = \ln(x-9)$ $(0, \infty)$

$x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$

$D_f : (9, \infty)$

2) $f(x) = \ln(\ln x)$

$= x > 0$ and $\ln x > 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$(0, \infty) \cap (1, \infty)$

--- +++ (1)

0 1 $\Rightarrow D_f = (1, \infty)$

يوجد ايضا بهذه الرسمة

CRAFT NOTEBOOK

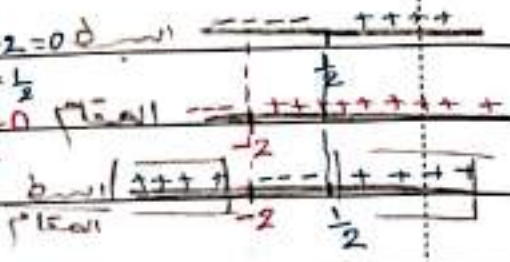
Subject Date 26th Oct No.

3) $f(x) = \log_7\left(\frac{4x-2}{2+x}\right)$

$\frac{4x-2}{2+x} > 0$

$4x-2=0$ ⇒ $x=\frac{1}{2}$

$2+x=0$ ⇒ $x=-2$



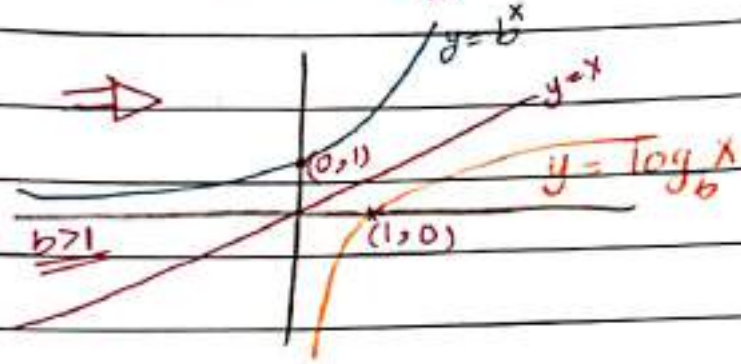
$(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ ✓

Subject Date 28th Oct No.

$f(x) = b^x$ $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ $b > 0, b \neq 1$

$g(x) = \log_b x$ $(0, \infty) \to \mathbb{R}$

→ Thm: b^x, $\log_b x$ are inverse functions



* Ex Find $f^{-1}(x)$

① $f(x) = 5^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5 x$

② $g(x) = \log_7 x \Rightarrow g^{-1}(x) = 7^x$

③ $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$

$(f \circ f^{-1})(x) = x$

$f(x) = b^x$, $f^{-1}(x) = \log_b x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f(\log_b x) = x$

تعويض من $\log_b b^x = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(b^x) = x$

تعويض $\log_b b^x = b$

↳ $e^{\ln x} = x$

↳ $\ln e^x = x$

Subject Date 28th Oct No.

* Ex: ① $5^{\log_5 x} = x$

② $\ln e^2 = 2$

③ $\log 9^x = x$

④ $e^{2\ln 5} = e^{\ln 5^{-2}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

* Ex: Find Domain and Range $f(x) = \frac{(e^x - 1)}{e^x + 3} \to R$

$\therefore Df = R$ $\quad e^x + 3 = 0 \quad e^x = -3$ X

لأنه $(0, \infty)$

عشان أوجد الـ Domain لـ f^{-1} وأوجد الـ Range لـ f عشان أتأكد

$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 3} \quad y e^x + 3y = e^x - 1$

$y e^x - e^x = -1 - 3y$

$e^x (y - 1) = -1 - 3y$

$e^x = \frac{-1 - 3y}{y - 1}$

عشان أخلي x لحالها لازم أتخلص من e عن طريق

أحط ln للطرفين

$\ln e^x = \ln \left(\frac{-1 - 3y}{y - 1}\right)$

$x = \ln \left(\frac{-1 - 3y}{y - 1}\right) \rightsquigarrow f^{-1}(x) = \ln \left(\frac{-1 - 3x}{x - 1}\right)$

$\to Domain(f^{-1}) = Range(f)$

$\Rightarrow \frac{-1 - 3x}{x - 1} > 0$

	$-\frac{1}{3}$		1	
البسط	−	+	+	−
المقام	−	−	+	+
البسط / المقام	−	+	+	−

$Df^{-1} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) = Range\, f$ X

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 22th. Oct No.

Solve :

① $2^{x-5} = 3 \Rightarrow \log_2 2^{x-5} = \log_2 3 \rightarrow x-5 = \log_2 3$

نعطي $\log_2$ لطرفين

$\boxed{x = \log_2 3 + 5}$

حل آخر لا موجب الثانوية

② $\ln(x+1) = 5 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^5$

نعطي e أساس لطرفين $\Rightarrow x+1 = e^5 \rightarrow \boxed{x = e^5 - 1}$

③ $\log x^2 + \log x = 30 \rightarrow 2\log x + \log x = 30$

نجمع $3\log x = 30 \quad \div 3$

$\log_{10} x = 10 \quad x = 10^{10}$

④ $e^{2x} - e^x = 6 \rightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad e^x = y$

تحيل معادلة تربيعية $y^2 - y - 6 = 0$

$(y-3)/(y+2) = 0$

$y = 3 \quad / \quad y = -2$

$e^x = 3 \rightarrow (\ln) \quad / \quad e^x = -2 \times (0, \infty)$

$\boxed{x = \ln 3}$

⑤ $(x^2-1)(x-5)x^3 \log_x 2x = 0$ مجموعة الحل $\{\frac{1}{2}, 5\}$

يشترط لما استخدام اللوغاريتم ان يكون الأساس موجب

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, -1$ → ✱ $\log_2 x1$ ✗ ✱ $\log_2 x(-1)$ ✗

$x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 5}$ → $\log_5 x5$ ✓

$x^3 = 0 \Rightarrow x \neq 0$ → ✱ $\log_5 0x2$ ✗

$\log_x 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$ → ✱ $\log_{\frac{1}{2}} x2 = \log_{\frac{1}{2}} 1$ ✓

$0 = 1$ لا يلزم لأنه لوغاريتم

Subject Date 22th-Oct No.

(6) $\ln x + \ln(x-1) = 1$

بجمع اللوغاريتمات

$\ln(x)(x-1) = 1$ بحيث ما الطرفين

$e^{\ln(x)(x-1)} = e^{1}$

$(x)(x-1) = e$

$x^2 - x - e = 0$ معادلة تربيعية

نحل بالقانون العام $a=1$ $b=-1$ $c=-e$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times1\times-e}}{2\times1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4e}}{2}$

$\frac{1+\sqrt{1+4e}}{2}$ ← موجبة ✓ مقبول

$\frac{1-\sqrt{1+4e}}{2}$ ← $\sqrt{1+4e} > 1$ X

الجواب سالب ∴

لا نحتاج أخذ هذا الحل لأنه بالسؤال

عندنا $\ln x$ ولابد x تكون $x > 0$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 28th Oct No.

(7) $\log_2 3x + \log_2 9x^2 = 4$

[2] [4]

أساسات مختلفة

خارج أقدر أرجع الجميع

أستخدم خاصية ← $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

إذا ضرب

$= \log_2 3x + \frac{\log_2 9x^2}{\log_2 4} = 4$

$\log_2 4 = 2$

$\log_2 3x + \frac{\log_2 9x^2}{2} = 4$

$\log_2 3x + \frac{1}{2}\log_2 9x^2 = 4$

أرفعها (من تحت اللوغاريتم)

$\log_2 3x + \log_2 (9x^2)^{\frac{1}{2}} = 4$

$(9x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9x^2} = 3x$

$\log_2 3x + \log_2 3x = 4$

$\log_2 (3x)(3x) = 4 \Rightarrow \log_2 9x^2 = 4$

بصورة أسية $\Rightarrow 9x^2 = 2^4 \div 9$

$x^2 = \frac{2^4}{9} \quad \wedge \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{\frac{2^4}{9}} \rightarrow x = \pm\frac{4}{3}$

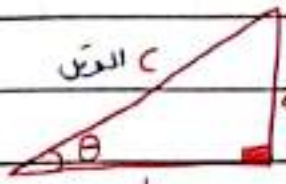
تهمل X ← $\log_2 3x \rightarrow x = -\frac{4}{3} \rightarrow \log_2 -4$ ← نعوض باللوغاريتم للتأكد بالصلاحية

الحل ← $x = \frac{4}{3}$

Subject Date 31th. Oct No.

بسم الله الرحمن الرحيم

* Tregonometric Functions : المعادلات المثلثية



① $\sin\theta = \frac{a}{c}$ المقابل / الوتر = θ جا

② $\cos\theta = \frac{b}{c}$ المجاور / الوتر = θ جتا

③ $\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ المقابل / المجاور = θ ظا

* نظرية فيثاغورس :

$c^2 = a^2 + b^2$

* معكوسهم :

④ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$ $\frac{1}{\theta \text{ جا}}$ = θ قتا

⑤ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$ $\frac{1}{\theta \text{ جتا}}$ = θ قا

⑥ $\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\frac{\theta \text{ جتا}}{\theta \text{ جا}}$ = θ ظتا

* الزوايا المشهورة :

الزاوية بالدرجات	degrees	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
الزاوية بالراديان	radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جيب الزاوية	$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
جتا الزاوية	$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Scanned with CamScanner

Subject Date 31 th Oct No.

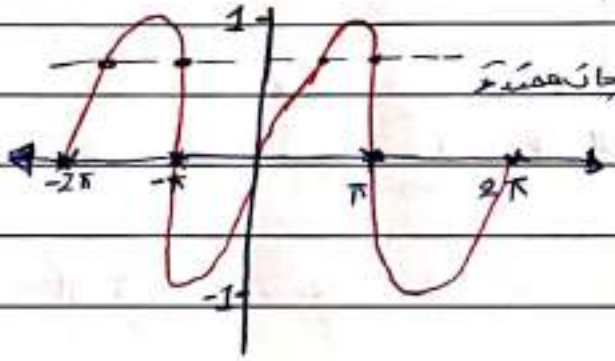
Ex:

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

* رسمة Sin x

على الفترة $[-2\pi, 2\pi]$



* الرسمة تكون على شكل موجات مستمرة إلى المالانهاية.

Domain = R لأنه حكينا إنه ممتد إلى المالانهاية

Range = [-1, 1]

* Sin not 1-1 لأنه يقطع أكثر من نقطة باستخدام الـ Horizontal line test

* Sin → Odd function لأنه في الرسم عنده Symetry عند نقطة الأصل

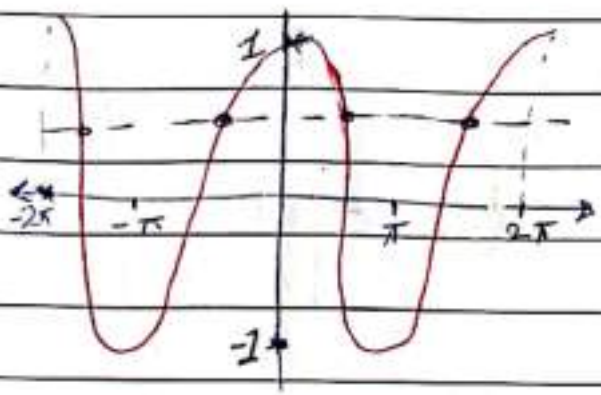
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 3th-Oct No.

رسمة cos x



* رسمة الـ cos موجات ومتكررة إلى اللانهاية

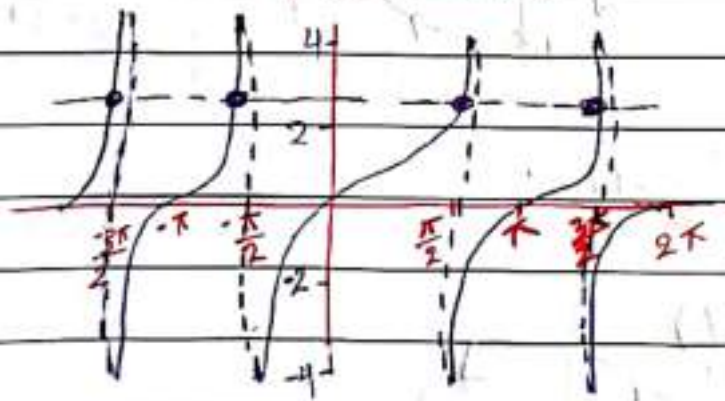
Domain = R
Range = [-1, 1]

cos not 1-1 لأنه يقطع بأكثر من نقطة

Horizontal line test بسبب

cos → even
↳ Simitry about y-axis
cos(-θ) = cos(θ)

tan x رسمة *



tan = sin θ / cos θ

Domain: لكل النقاط ما عدا cos θ = 0

R - {cos θ = 0}

= R - {±π/2, ±3π/2, ±5π/2}

Domain tan ≈ R - {π/2 + nπ}

n = 0, ±1, ±2, ...

tan not 1-1 (بنفس السبب)

tan θ = Odd

Range tan = R

sin θ / cos θ = odd / even = odd

tan(-θ) = -tan(θ)

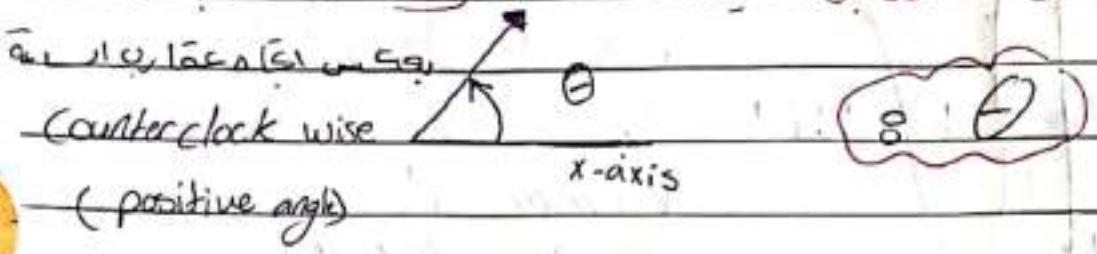
CRAFT NOTEBOOK

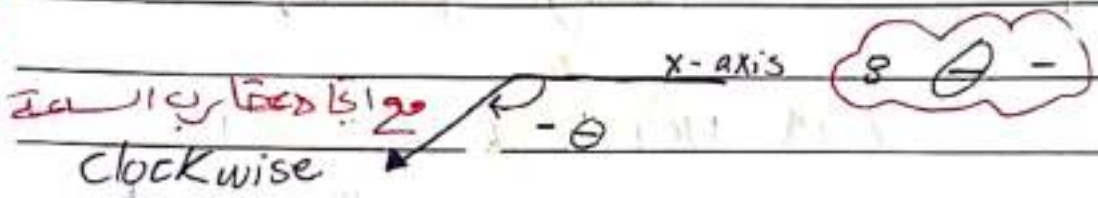
Scanned with CamScanner

Subject Date 31th. Oct No.

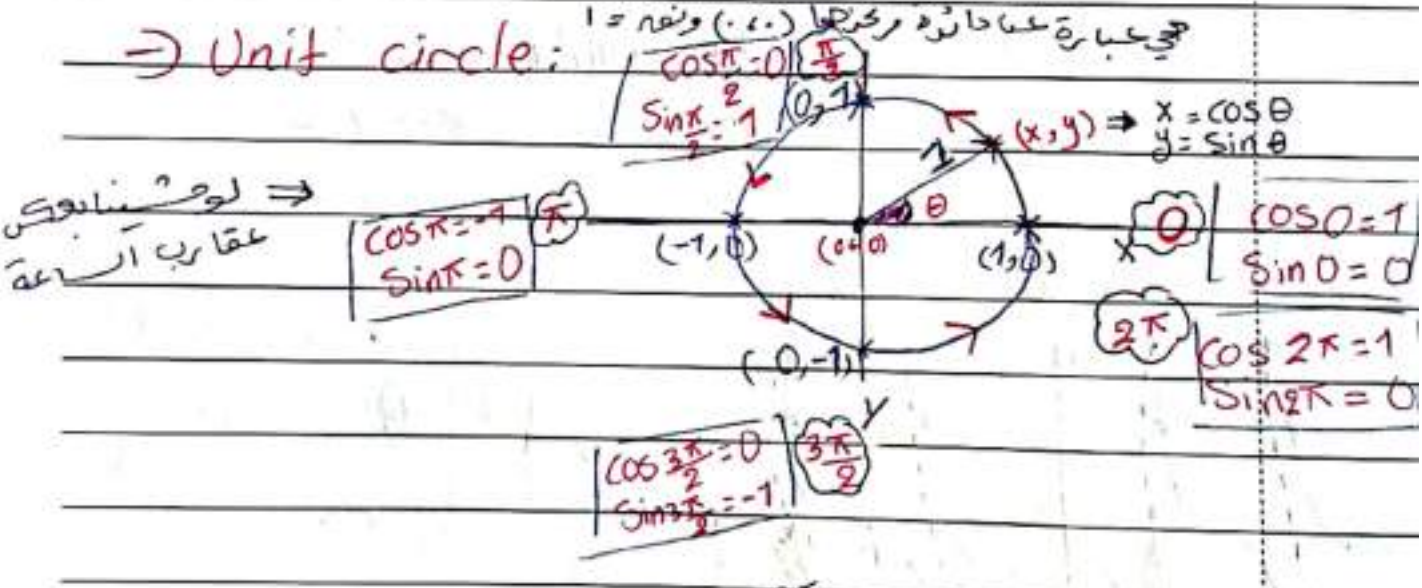
Tregonometric Function:

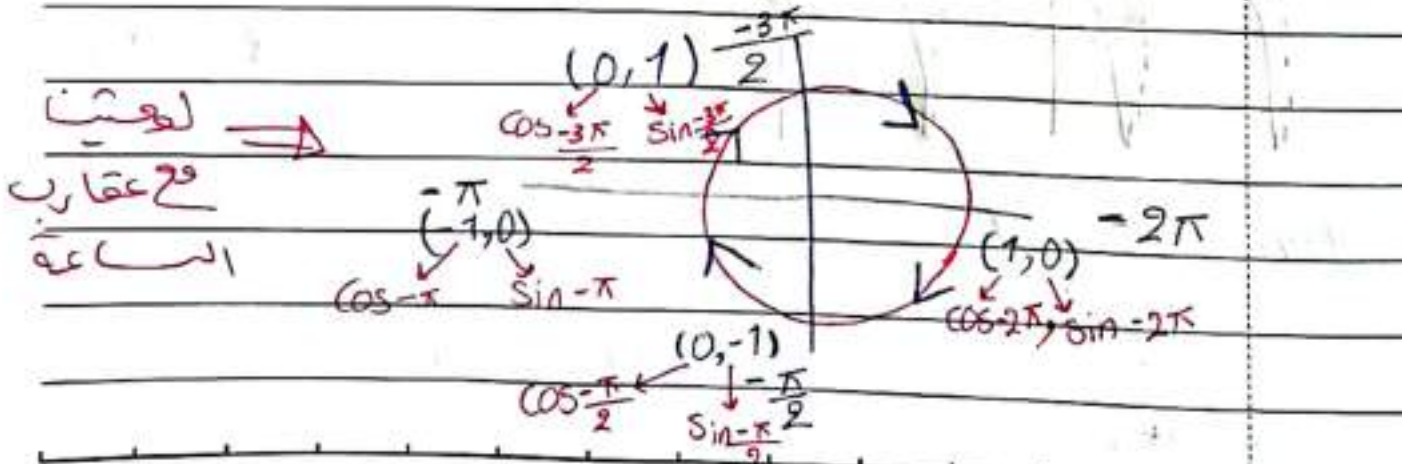
شو المقصود بزاوية: θ و $-\theta$ ؟





⇒ Unit circle:



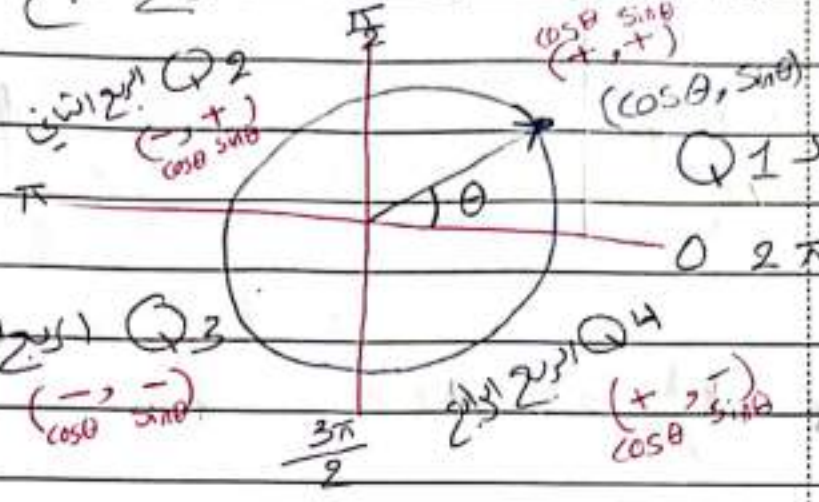


CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject

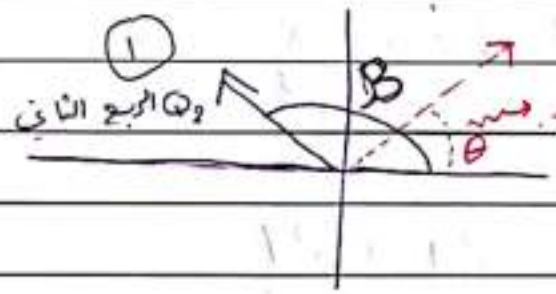
Date 31/11/. Oct No.

* دائرة الوحدة مقسمة على أربع أرباع :



* لحاسبي أحسب الـ cos / sin للزاوية يرجعها للزاوية المرجعية (الحادة) وموجودة بالربع الأول .

Ex



$Q_2 \rightarrow Q_1$

$\theta = \pi - \beta$

* find $\sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{6}$?

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 * 180}{6} = 150^\circ$ ← موجودة بالربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

← الاشارة نعرفها من الربع الموجودة فيه زاوية السؤال

$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

← ربع ثاني (−, +) cos sin

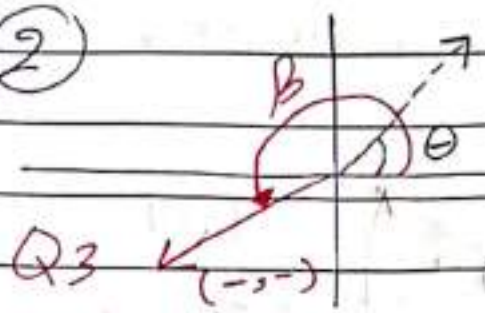
$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date No.

(2)



$Q_3 \longrightarrow Q_1$

$\theta = \beta - \pi$

$* \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \in Q_3$

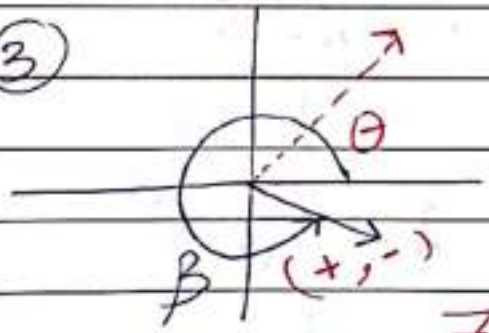
$\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

$\sin(\frac{4\pi}{3}) = \ominus \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• الزاوية المرجعية للزاوية

$\cos(\frac{4\pi}{3}) = \ominus \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

(3)



$Q_4 \rightarrow Q_1$

$\theta = 2\pi - \beta$

$* \frac{7\pi}{4} \in Q_4$

$\theta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(\frac{7\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 31th. Oct No.

* Examples:

Find domain ?

① $f(x) = \sin(\sqrt{x-5})$ ← الجذر التربيعي يبدأ من الصفر وداخله أن يكون أكبر أو يساوي الصفر

$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$ * $D_f = [5, \infty)$

② $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x-7}\right)$ ← استثناء أصفار المقام

$x - 7 = 0$

$x = 7$ $D_f = R - \{7\}$

Find the Range ?

① $f(x) = \frac{3}{5+\cos x}$ $D_f = R$

لأنه حتى لو بدي أخذ أصفار المقام ← $5 + \cos x = 0$

$\cos x = -5$ X

حاعندي زاوية الـ cos لأنها = -5

لأنه قيم الـ cos خصط بين $[-1, 1]$

بطريقة إيجاد الـ Range ⇒ $-1 \leq \cos x \leq 1$

① بجمعه بالـ Range $4 \leq 5 + \cos x \leq 6$

② بقلوب حسابية $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{5+\cos x} \geq \frac{1}{6}$

حتى أوصل للمقدار الموجود بالسؤال $\frac{3}{4} \geq \frac{3}{5+\cos x} \geq \frac{3}{6}$

انتهى الحل

$= \frac{3}{4} \geq f(x) \geq \frac{1}{2}$

Range $f = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

+5 | 8

أقلب المتباينة | 8

× 3 | 8

لما أقلب المتباينة بعكس اتجاهها

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 31th. Oct No.

② $f(x) = 2\sin^2 x + 3$ $D_f = R$

$-1 \le \sin x \le 1 \quad |^2|$

$0 \le \sin^2 x \le 1 \quad |*2|$

$0 \le 2\sin^2 x \le 2 \quad |+3|$

$3 \le 2\sin^2 x + 3 \le 5$

Range: $[3, 5]$

لأنها طلعت أي شكلة فالزاوية

* قاعدة: إذا كان $a \le x \le b$

$0 \le x^2 \le 1$

من الصفر إلى أكبر تربيع من a و b.

مثال: $-3 \le x \le 2$

$0 \le x \le 9 \leftarrow ^2$

③ $f(x) = 3 + |\cos x|$

$-1 \le \cos x \le 1$ مطلق

$0 \le |\cos x| \le 1 \quad |+3|$

$3 \le 3 + |\cos x| \le 4$

Range $= [3, 4]$

* الوظيفة تقسم التربيع + يعني بين هذين الصفر و وظلت أكبر عدد.

Scanned with CamScanner

Subject

Date 2nd Nov No.

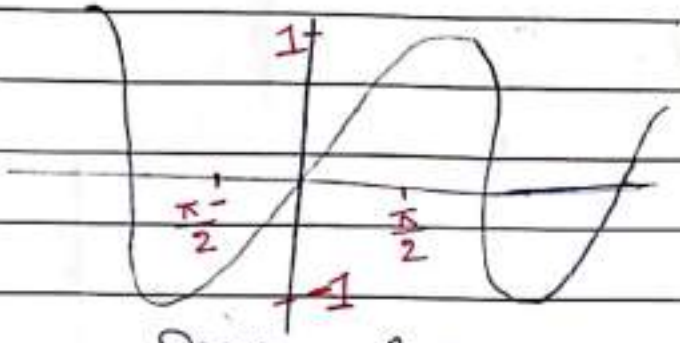
* Inverse Trigonometric Function:

Domain Range

$\sin X : R \longrightarrow [-1, 1]$. Not 1-1

* لكي تكون أصل inverse لازم يكون 1-1

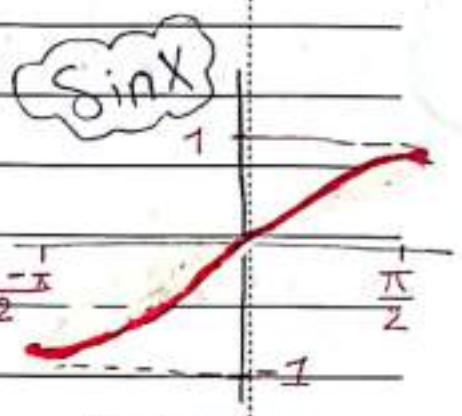
اذن: إنه نعمل Restriding لل Domain يعني قارن أخذ جزء كل



Domain Range

$R \longrightarrow [-1, 1]$

NOT 1-1



Domain Range

$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

1-1

* دون رح أقدر أكسبله inverse الـ

Domain sinx

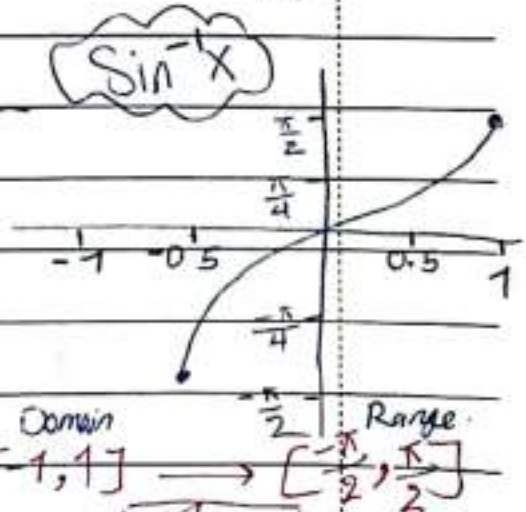
↓ $^{-1}$

Range $\sin^{-1} x$

Range sinx

↓

Domain $\sin^{-1} x$



Domain Range

$[-1, 1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

CRAFT NOTEBOOK

Odd $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 2nd Nov No.

Ex:

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ؟ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي الزاوية التي جيبها $\frac{1}{2}$ وتقع بين

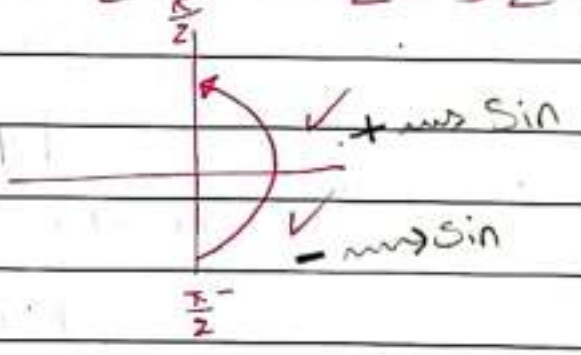
$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ ؟ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ هي الزاوية التي جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وتقع بين

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ → $\sin$ → odd

∴ بقدر أطلع الإشارة السالبة برا

لازم تكون الزاوية تقع في الربع الأول أو الرابع لأنه الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



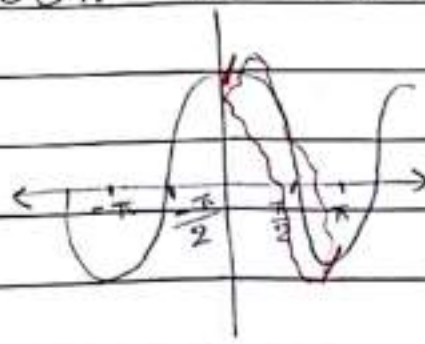
Scanned with CamScanner

Subject

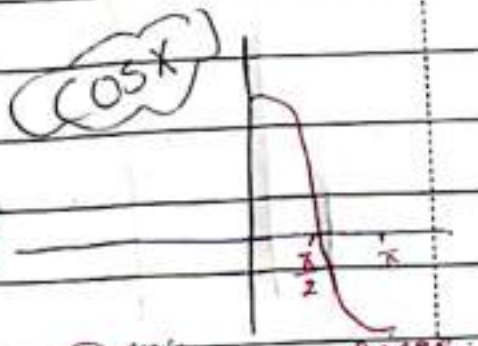
Date 2nd Nov.

Domain , Range :

$\cos x : R \longrightarrow [-1,1]$ Not 1-1



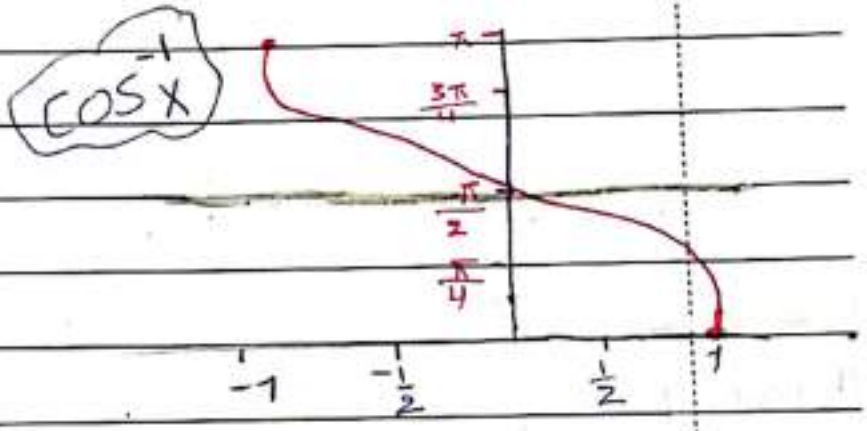
Restricting



Domain $[0,\pi] \longrightarrow$ Range $[-1,1]$

· 1-1

inverse



$\cos^{-1} x$: Domain $[-1,1] \rightarrow$ Range $[0,\pi]$

Ex :

$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ بين الزاوية اي جيبها = يساوي بين $[0,\pi]$ ؟

$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{2})$

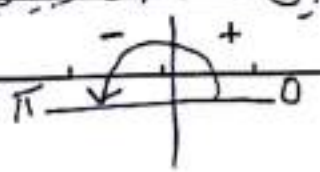
$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$

1-1 | not even not odd

العلاقة : $\cos^{-1}(-x)$ ؟

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

* كل الإجابات بين الـ $[0,\pi]$ (يستثنى الربع الأول والثاني)



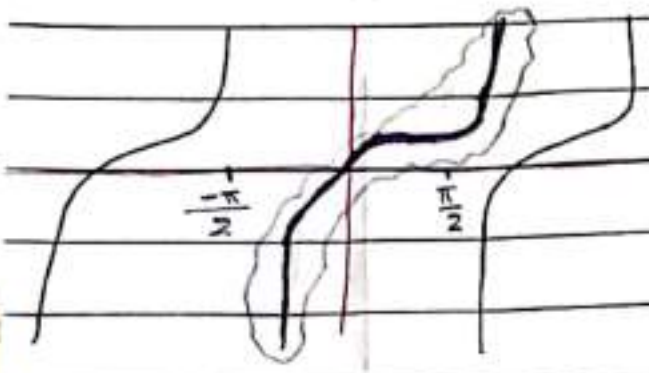
CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

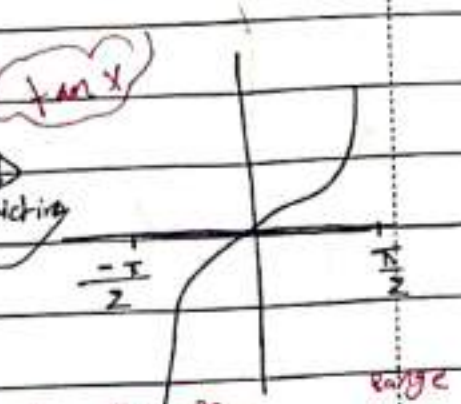
Date 2nd Nov No.

$\tan x : R - \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n: 0, \pm1, \pm2 \dots\} \longrightarrow R$ (Domain → Range)



Not 1-1

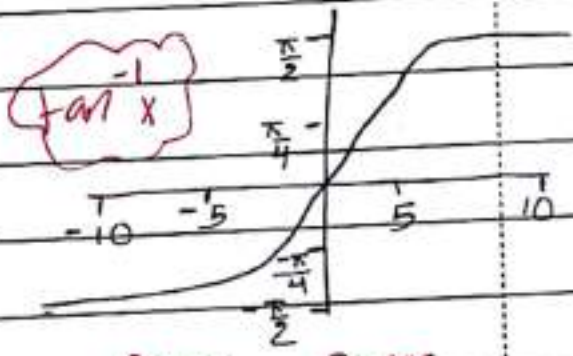
Restricting



$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow R$ (Domain → Range)

1-1

inverse



Ex

① $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

② $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

③ $\tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1) = \frac{-\pi}{4}$

Domain → Range

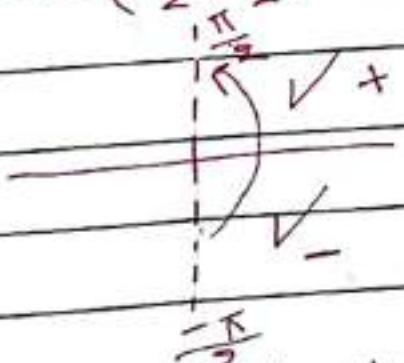
$R \longrightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1-1

odd

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

$* \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) *$



CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject

Date 2nd. Nov No.

Inverse Trigonometric Functions.

Ex: Find the domain $f(x) = \sin^{-1}(2x+1)$

Domain $\sin^{-1}(x) : [-1, 1]$

عشان نطلب الـ Domain فبلش من الآخر الجيبا للسؤال وبخليه بين x كالها

$-1 \leq 2x+1 \leq 1 \quad -1$

$-2 \leq 2x \leq 0 \quad \div 2$

$-1 \leq x \leq 0$

$\therefore$ Domain $= [-1, 0]$

Find Range $f(x) = \pi + |\tan^{-1} x|$

* Range $\tan^{-1}(x)$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

عشان نطلب الـ Range فبلش من $\tan^{-1} x$ وبخليها كما هي بنفس رتبة السؤال

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$

$0 \leq |\tan^{-1} x| < \frac{\pi}{2}$

$\pi \leq \pi + |\tan^{-1} x| < \frac{\pi}{2} + \pi$

Range $= [\pi, \frac{3\pi}{2})$

هنا الرقم المساوي بنسميه بنضمه للفترة.

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 2nd Nov No.

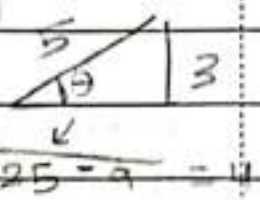
* Find the value of the following:

① $\sec(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ ⇒ $\sin^{-1}(\frac{3}{5}) = \theta$ (sin نعكس للطرفين)

(θ الزاوية المقابلة)

$\frac{3}{5} = \sin\theta$

$\sec\theta = \frac{5}{4}$



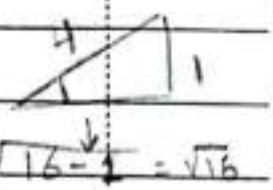
② $\sin[2\sin^{-1}(\frac{1}{4})]$ ⇒ $\sin^{-1}\frac{1}{4} = \theta$

$= \sin[2\theta]$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2(\frac{1}{4}) \times (\frac{\sqrt{15}}{4}) = \frac{2\sqrt{15}}{16}$

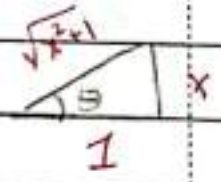
$\sin\theta = \frac{1}{4}$



③ $\cos(\tan^{-1}(x))$ ⇒ $\tan^{-1}x = \theta$

$\tan\theta = \frac{x}{1}$

$= \cos(\theta) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

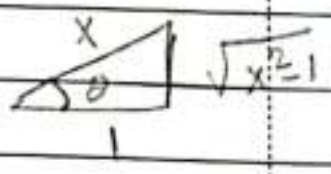


④ $\sin(\sec^{-1}(x))$ ⇒ $\sec^{-1}(x) = \theta$

$\sec(\theta) = x$

الوتر / المجاور

$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$



CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 2nd NOV No.

Thm: $f(f^{-1}(x)) = x$ and $f^{-1}(f(x)) = x$

$f(x) = \sin x$ $\quad f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$

$\sin(\sin^{-1} x) = x$, $\forall x \in D_{\sin^{-1}} \rightsquigarrow [-1, 1]$

$\sin^{-1}(\sin x) = x$, $\forall x \in D_{\sin} \rightsquigarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ex: $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ لأنه $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$

$\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ $\rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{3}) \longrightarrow \frac{2\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

الحل $\Rightarrow \frac{2\pi}{3} \in Q_2 \rightarrow Q_1$ $\quad \theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ ماضي تغيير على الإشارة

$\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ لأنه $\sin \oplus$ بالربع الأول والثاني

$\sin^{-1}(\sin\frac{4\pi}{3}) \rightsquigarrow \frac{4\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\frac{4\pi}{3} \in Q_3 \rightarrow Q_1$ $\quad \theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(\ominus\sin\frac{\pi}{3}) = -\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

لأنه بالربع الثاني

$\ominus \sin$ بإشارة!

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 2nd Nov No.

$f(x) = \cos x$, $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$

$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1}(\cos(x)) = x \quad x \in [0, \pi]$

Ex: $\cos^{-1}(\cos\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

$\cos^{-1}(\cos\frac{7\pi}{4}) \rightarrow \frac{7\pi}{4} \in Q4 \longrightarrow Q1$

$\theta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\cos^{-1}(\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$

$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3}) \quad \frac{4\pi}{3} \in Q3 \longrightarrow Q1$

$\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

$\cos^{-1}(\cos\frac{\pi}{3}) \rightsquigarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

$= \pi - \cos^{-1}(\cos\frac{\pi}{3})$ Not even Not odd

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

لو في إشارة الـ cos بالبرهان سالبة .

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 2nd Nov No.

$f(x) = \tan x$, $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$

$\tan(\tan^{-1}x) = x \quad \forall x \in R$

$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ex: ① $\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

② $\tan^{-1}(\tan\frac{2\pi}{3}) \rightarrow \frac{2\pi}{3} \in Q2 \rightarrow Q1$

$\theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$= \tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{3}) = -\tan^{-1}(\tan\frac{\pi}{3})$

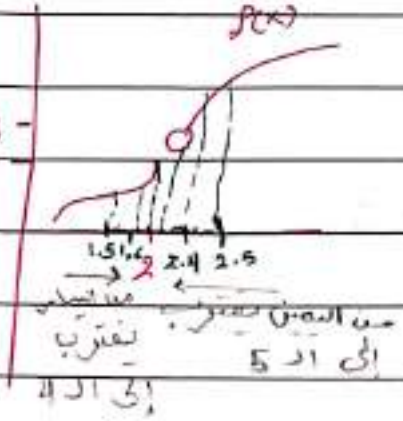
$= -\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 9th - Nov No.

* The limit of function : النهايات

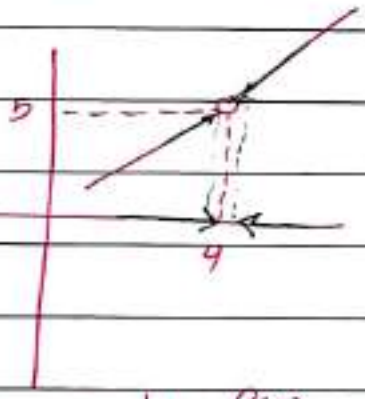


$\lim_{x \to 2} f(x)$ → $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ } ≠

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ d.n.e does not exist

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \text{if \& only if} \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ex



$\lim_{x \to 4} f(x)$ → $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$ } = $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$.

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 9th. Nov No.

calculating limits :

① $\lim_{x \to a} c = c$ ← $a, c \in R$

ex: $\lim_{x \to 7} 10 = 10$, $f(x) = 10$

② $\lim_{x \to a} x = a$

ex: $\lim_{x \to 9} x = 9$, $f(x) = 9$

③ $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

ex: $\lim_{x \to 4} x^2 = 4^2 = 16$, n positive ⊕

موجودة

Thm $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ∀ a, k ∈ R

① $\lim_{x \to a} (f+g) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

② $\lim_{x \to a} (fg) = \lim_{x \to a} f \lim_{x \to a} g = LM$

النهايات توزع بالجمع والطرح والضرب والقسمة

③ $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 9th .Nov No.

④ $\lim_{x \to a} k f(x) = \lim_{x \to a} k \lim_{x \to a} f(x) = kL$

⑤ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (n even $L > 0$)

ex: ① $\lim_{x \to 2} x^2 + 5x - 1 = 2^2 + 5(2) - 1 = 4 + 10 - 1 = 13$

② $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ $p(x)$: poly

② $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ \frac{5x^3 + 4}{x - 3}, & x < 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$

3 ∈ الدالة الأولى

b) $\lim_{x \to 1} f(x)$

1 ∈ نقطة تشعب

$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$ (إشارة الكبير (يمين))

كيف واعلى وشكلة ← بالعدد لا في الدالتين جهة اليمين .

$\lim_{x \to 1^-} \frac{5x^3 + 4}{x - 3} = \frac{5(1) + 4}{1 - 3} = \frac{9}{-2}$ (إشارة الأصغر (يسار))

$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x)$ d.n.e

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 9th, NOV No.

Ex $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$

Find → ① $\lim_{x\to 2} f(x) + 5g(x) = \lim_{x\to 2} f(x) + 5\lim_{x\to 2} g(x)$

$= 3 + 5(4) = 23$

② $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

$= \frac{3+4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

Ex Find k such that

$\lim_{x\to 1} f(x)$ (exist)

لكي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 , & x \geq 1 \to (+) \\ 2kx+5 , & x \leq 1 \to (-) \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

* لكل تعويض بعض حيث لازلة القاعدة يساوي شيء ثابت حسب

$\lim_{x\to 1} x^2+1 = \lim_{x\to 1^-} 2kx+5$

$2 = 2k+5 \longrightarrow 2-5 = 2k \quad k = -\frac{3}{2}$ ✱

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 9th NOV No.

* calculating limits $(\frac{0}{0})$

قيمة غير محددة

① $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{2^2-4}{2^2+2-6} = \frac{0}{0}$ ⚠ خطأ

$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$ ✓

لـ هكذا هو جواب النهاية .

② $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{0}{0}$ ⚠ خطأ

الضرب بالمرافق الترميزي

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} * \frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{x-3(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

③ $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{2}}{x-2} = \frac{0}{0}$ ⚠ خطأ توحيد مقامات

$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{6-3x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(\frac{2-x}{2x})}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(-1)}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{-3}{2x} = \frac{-3}{4}$ ✓

CRAFT NOTEBOOK

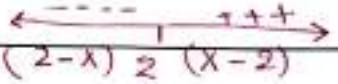
Scanned with CamScanner

Subject

Date 9th NOV No.

(14) $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ بسبب وجود القيمة المطلقة ح نشوف من يمين ويسار

لازم نبدأ بتعريفها $|x-2|$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, & x \geq 2 \\ \frac{2-x}{x-2}, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$$ d.n.e.

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

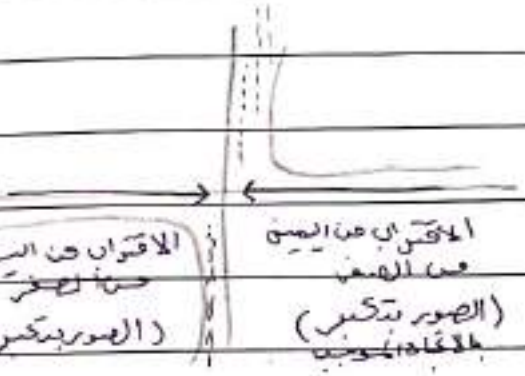
Date 9th NOV No.

Infinite limits : $\frac{c}{0}$, $c \in R$, $c \neq 0$

$+\infty$ $-\infty$ $-\infty$ $+\infty$

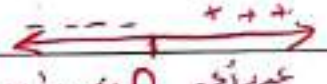
① $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ رسمته

$= \frac{1}{0}$ $+\infty$ $-\infty$



* لو ماشي برسمة ؟؟

* نختبر الإشارة عند الصفر للاقتراب

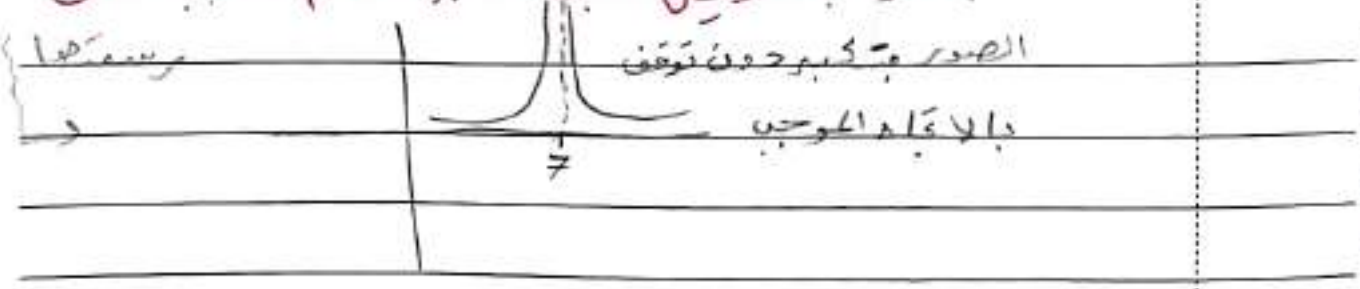


② $\lim_{x \to 7} \frac{1}{(x-7)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

∴ بما أن المقام موجب ≠ 0 ونختبر الإشارة عند الصفر للاقتراب.

(توبيخي) ← يعني القيم على خط الأعداد كلها موجبة

بالتالي بالتحويض البسط موجب والمقام موجب ⊕



CRAFT NOTEBOOK

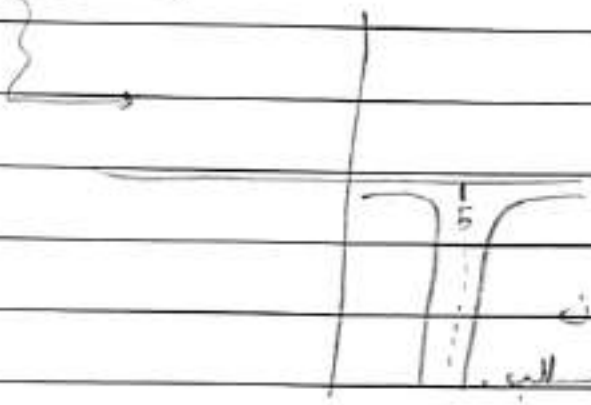
Scanned with CamScanner

Subject

Date 9/11/2017 No.

(3) $\lim_{x \to 5} \frac{-1}{(x-5)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$

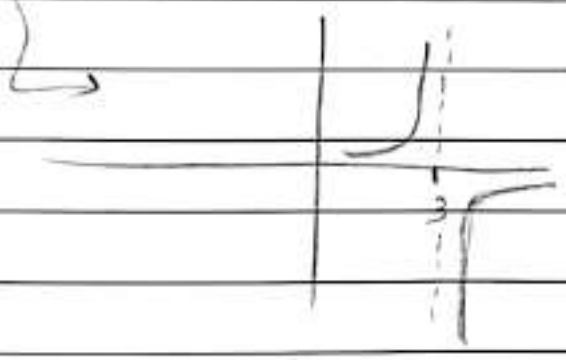
بما أن المقام موجب دائماً وتكون
البسط سالبة
رسمها



بتكبير الأرقام تكون
تؤخذ حالة نهاية اليسار

(4) $\lim_{x \to 3} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0}$ $\begin{cases} x \to -\infty \\ \to +\infty \end{cases}$

رسمها



ex: $f(x) = \frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ Find ?

* $\lim_{x \to 2} f(x)$ * $\lim_{x \to 4} f(x)$ * $\lim_{x \to -2} f(x)$

الحل:

Scanned with CamScanner

Subject

Date 9th Nov No.

① $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ ✓ بالتعويض المباشر.

② $\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{2-4}{0} = \frac{-2}{0}$ نشوف إشارة البسط والمقام لأن المقدار كامل

لأنه يعني x بالبسط و x بالمقام.

$x \to 4^+ = -\infty$ | $x \to 4^- = +\infty$

البسط: + + + | 2 | - - -

المقام: + + + | -2 | - - - | 4 | + + +

③ $\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{4}{0}$ ← $+\infty$ أو $-\infty$

② نفس خطوات الفرع

$f(x)$: + + + | -2 | - - - | 2 | + + + | 4 | - - -

-2 ، 2 ، 4

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

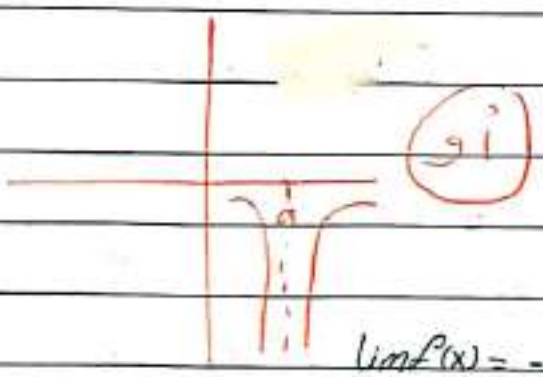
Subject Date 11 Nov No.

* Vertical asymptotes :

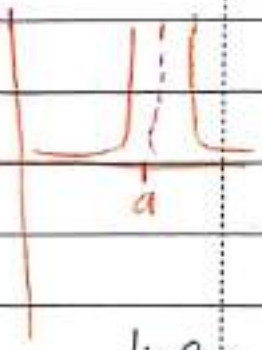
$x = a$ V. asy $\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

أو

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

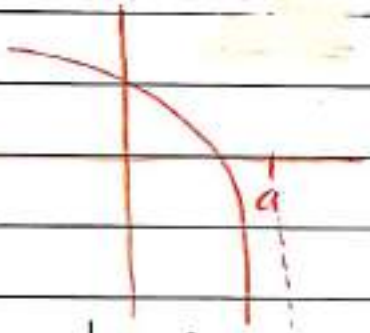


$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

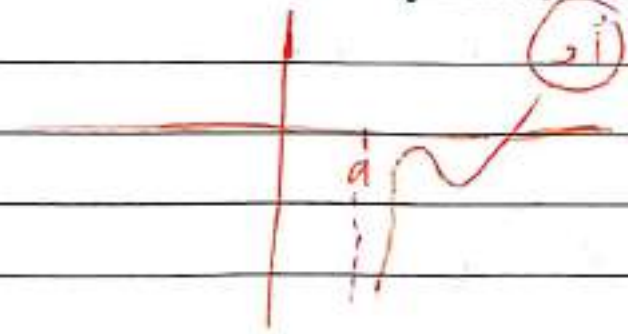
* إذا كان الإقتراب من اليسار فقط :



$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

* إذا كان الإقتراب من اليمين فقط :



$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

* أي حالة من الحالات السابقة تكون للاقتران خط اقتراب عمودي ← V.asy ← جوابه دائماً $\pm\infty$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 11th. NOV No.

*ex Find the vertical asymptotes ?

① $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ لما V.asy يجي لما يكون الجواب $\frac{\text{عدد}}{0}$ يعني تكون $(+\infty, -\infty)$

* نخص عليه عن طريق أصفار المقام.

$x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{-4}{0} = \infty$ بوجود إشارة ∞ معناها أن حد الاقتراب من الأعداد حاول يقترب من العدد المطلوب

$x=0$ is V. asy

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{0}{0}$ ⚠ نحلل $\Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \neq \infty$ Not V. asy

إذا طلع وهم ∞ بعض النظر عن إشارتها فهي V. asy

OR $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x}$ نبسط الاقتران

نساوي المقام بالصفر $x=0 \Rightarrow \therefore$ V. asy

② $f(x) = \frac{x-2}{|x|-2}$ $|x|=0 \rightarrow x=0$

$-x \quad 0 \quad x$

نعيد إعادة التعريف $f(x) \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}=1, & x \geq 0 \\ \frac{x-2}{-x-2}, & x<0 \end{cases}$ طالما بنحذف وبكلا قسمه فبالتالي اختصرت

$-x-2 \rightarrow -x-2=0 \rightarrow x=-2$ V. asy

Sol 2 $|x|-2=0 \Rightarrow x=\pm 2$ نوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ نجربهم

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 11th - NOU No.

* هل جميع الاقترانات لها V.asy ؟

① $f(x) = x^2 + 5x + 7$ NO V.asy [0] (غير صحيح) ← توضيح

② $f(x) = \frac{1}{x-7}$, $x = 7$ V.asy [1]

③ $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $x=1 / x=2$ V.asy [2]

مقام بسط لابسط ← صورة

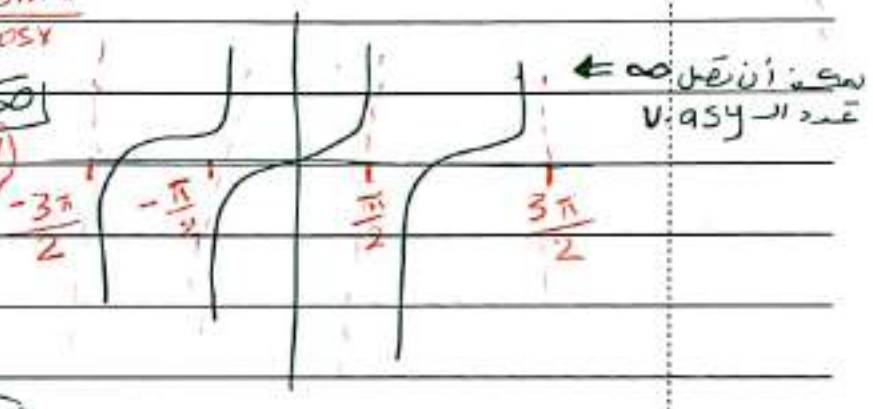
④ $f(x) = \frac{5}{(x-3)(x)(x+4)}$, $x=3 / x=0 / x=-4$ V.asy [3]

مقام بسط لابسط ← صورة

⑤ $f(x) = \tan x$ ← $\frac{\sin x}{\cos x}$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ V.asy ← $\frac{1}{0} = \infty$

اصفار المقام

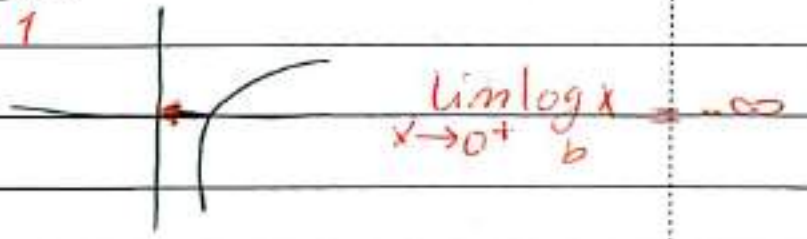


يمكن أن تقل عدد الـ V.asy ← ∞

يمكن الاقتران ما يكون له مقام ← ليس له V.asy

⑥ * $f(x) = \log_b x$, $b > 1$

$x = 0$ V.asy



$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$

* $f(x) = \ln x$

$x = 0$ V.asy $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 11th - 2017 No.

Continuity : الإتصال

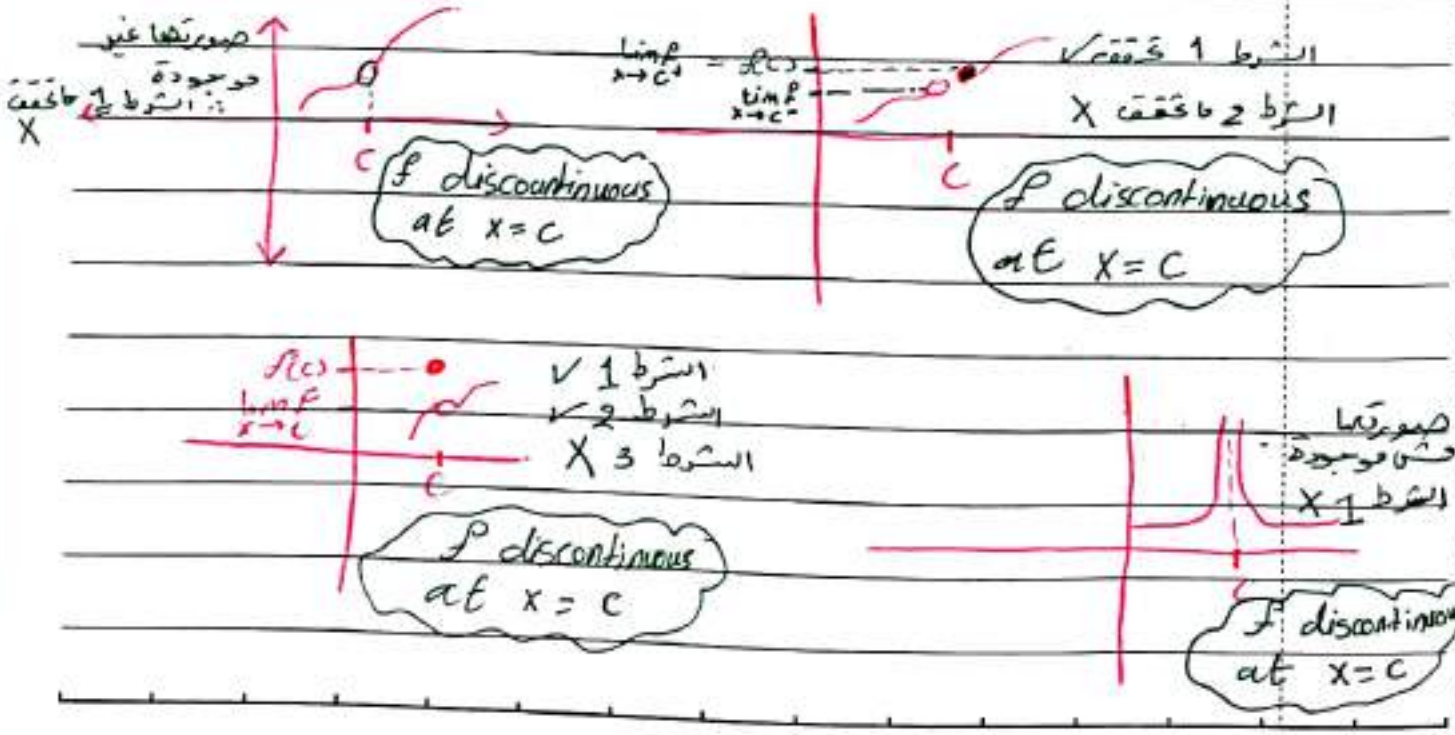
تعريف الإتصال على نقطة

Definetion : A function is said to be continuous at $x=c$ provided the following conditions are satisfied :

1. $f(c)$ is defined $\Rightarrow (c \in D_f)$
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ exist $\Rightarrow (\lim_{x \to c^+} f = \lim_{x \to c^-} f)$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

* إذا الشروط الثلاث تحقق فأكيد الشرط 2 موجود ونهايته تحققوا
* إذا الشرط الأول ما تحقق ما بكمل حل ، إذا الشرط الثاني ما تحقق ما بكمل

Remark : f is not continuous at $x=c$, عدم اتصال f discontinuous at $x=c$

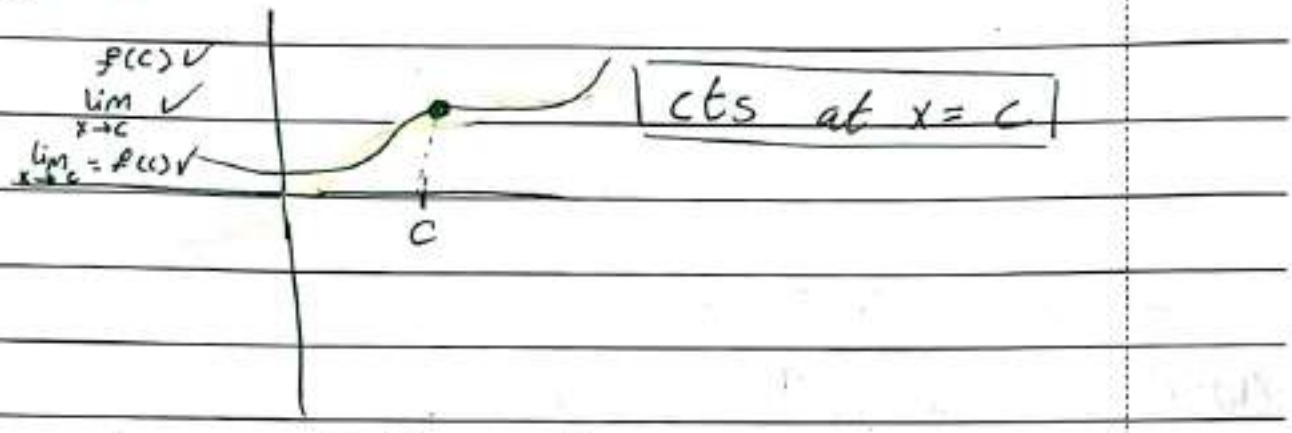


CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 11th Nov No.

* متى يكون الاقتران متصل عند تحقق جميع الشروط:



Note : If f(x) cts on R = (-∞, +∞)
f(x) continuous everywhere.

* Theorem : If the functions f & g are cts at x=c
اذا كانت f و g متصلة عند x=c فإن
(a) f ± g is cts at x=c
(b) f * g is cts at x=c
(c) f/g is cts at x=c , g(c) ≠ 0

* Theorem : the following types of functions are cts at every number in their domains. →
⇒ polynomials : → $x^3 + 5x + 7$, x^3 ---- (everywhere)
⇒ rationals : → $\frac{1}{x}$ → $(R - \{0\})$ مجال الاقتران
⇒ root functions : → $\sqrt{x}$ → (cts $[0, \infty)$), $\sqrt[3]{x}$ (cts everywhere)
⇒ trigonometric : → sin x / cos x (cts everywhere)
tan x $R - \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$ مجال الاقتران
⇒ Inverse trigonometric : → $\tan^{-1}x$ (cts everywhere)
$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ $[-1, 1]$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 11th NOV No.

⇒ exponential : b^x, e^x (cts everywhere) Domain R

⇒ logarethmic : $\ln x$, $\log_b x$ $(0, \infty)$ يتصل على مجاله

Ex where is the function $f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$ cts?

① $f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$ الاقتران Domain يكون متصل على مجاله. بالتالي

البسط $\ln x \to (0, \infty)$

$\tan^{-1} x \to R$ $\Big\} \cap (0, \infty)$

المقام $x^2 - 1 \to R - \{\text{الاصفار}\} = R - \{x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1\} = R - \{1, -1\}$

$(0, \infty) \cap R - \{1, -1\}$

$= (0, 1) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ cts $(0, 1) \cup (1, \infty)$

② $f(x) = \sin^{-1}(1 + 2x)$ Df ??

$-1 \leq 1 + 2x \leq 1$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$-2 \leq 2x \leq 0 \div 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$

$D_f = [-1, 0] \to f(x)$ cts $[-1, 0]$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 11th. NOV No.

③ $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ أصفار المقام

$1+e^{\frac{1}{x}} = 0 \longrightarrow -1 = e^{\frac{1}{x}}$ X

$\frac{1}{x} \Rightarrow x = 0$ أصفار المقام بالأسس

$D_f = R - \{0\}$

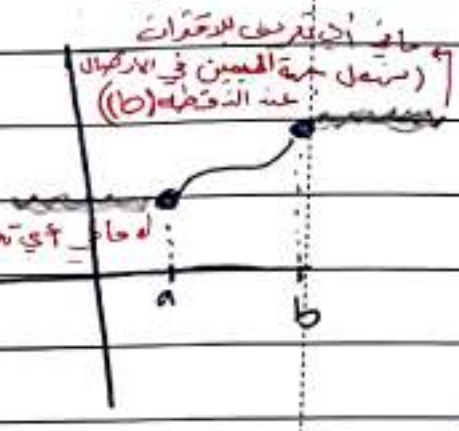
$f(x)$ cts $R - \{0\}$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 14th. Nov No.

* Continuity on an Interval : الاتصال على فترة



* f cts [a,b] if:

① f cts (a,b)

② $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

[f cts from right at x=a]

③ $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

[f cts from left at x=b]

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & 0 \le x < 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$

Is f(x) cts on the closed Interval [0,1] ?

* نعالج الشروط :

* Is f(x) cts on (0,1) ?

$|x^2-1|$ → (cts everywhere) كثير حدود ✓

* Is f(x) cts at x=0 (right) ?

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \stackrel{?}{=} f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} x^2-1 \stackrel{?}{=} 0-1 \Rightarrow -1 = -1$ ✓

f(x) cts at [0,1)

* Is f(x) cts at x=1 (left) ?

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(1)$

$\lim_{x \to 1^-} x^2-1 \stackrel{?}{=} 5 \Rightarrow 0 \neq 5$ X

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 14th Nov No.

* continuity of composition of

⇒ Theorem : If (f) cts everywhere , (g) cts everywhere
Then fog , gof cts every where.

* $f(x) = \sin x$ (cts everywhere) , $g(x) = |x|$ (cts everywhere) ⟹ تركيبهم $\sin|x|$, $|\sin x|$ ⇒ cts everywhere

* $\tan^{-1}(e^x)$ ⇒ $\tan^{-1} x$ cts everywhere , e^x cts everywhere → $\tan^{-1}(e^x)$ (cts everywhere)

⇒ Theorem : If g cts $x=c$ and $f(x)$ cts $g(c)$ Then fog cts at $x=c$

* $f(g(x))$ ⟹ fog cts C ← ① g cts at $x=c$ ② f cts at $g(c)$

ex : $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$, $g(x) = \frac{1}{2x}$

① f is cts $R - \{\frac{1}{2}\}$
② g is cts $R - \{0\}$

Q1 Is fog cts at $x=0$? * Is g cts at $x=0$? NO
fog disCts at $x=0$ ← بكمل حل مباشرة بكتبلك

Q2 Is fog cts at $x=1$? * Is g cts at $x=1$? yes
fog disCts at $x=1$ ← * Is f cts at $g(1)$? NO
f cts at $(=\frac{1}{2})$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 14th Nov No.

Q3 Is $f \circ g$ cts at $x = \frac{1}{2}$?

* Is g cts at $x = \frac{1}{2}$? yes ✓
* $f(x)$ cts at $g(\frac{1}{2})$? $= 1$? yes ✓

$f \circ g$ cts at $x = \frac{1}{2}$ ✓

⇒ Theorem: If $\lim_{x \to c} g(x) = L$ and $f(x)$ is cts at L.

Then $\lim_{x \to c} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \to c} g(x)) = f(L)$

* يعني = ان أدخل النهاية لداخل الاقتران بشرط:
① الاقتران الداخلي تكون نهايته موجودة
② الاقتران الخارجي متصل عند جواب النهاية.

ex: ① $\lim_{x \to 1} \sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

$\sin^{-1}$ متصلة على مجاله فيقدر أدخل lim ال

$= \sin^{-1}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$ بالتعويض المباشر صفر / صفر

$= \sin^{-1}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{2}$ متصل عند

$\sin^{-1}$ cts $[-1, 1]$: لأنه

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 14th Nov No.

② $\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right)$

cos is cts everywhere

لأنه شو طلع جواب الـ lim ح يكون الـ cos ...

عشان هيك

$= \cos\left(\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)$

$= \cos\left(\lim_{x\to 1} (x+1)\right) = \cos 2$ ✱

Scanned with CamScanner

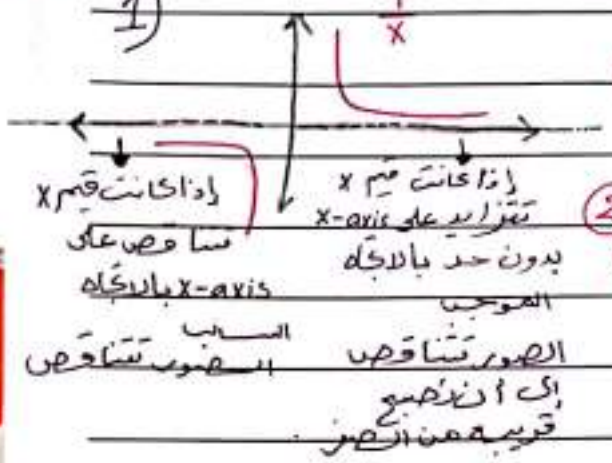
Subject Date 14th Nov No.

* Limits at Infinity :

$x \to +\infty$ تزايد بدون حد

$x \to -\infty$ تناقص بدون حد

1)



① $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

2)

$\lim_{x \to +\infty \text{ or } x \to -\infty} K = K$

ex ① $\lim_{x \to +\infty} (\pi) = \pi$ / ② $\lim_{x \to -\infty} 7 = 7$

3) $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} (f(x))^n = \left(\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x)\right)^n$, n positive integer

1, 2, 3, 4 ---

ex: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$, find $\lim_{x \to +\infty} (f(x))^4$?

x يقترب 4 عدد صحيح موجب ∴ تدخل النهاية

$= \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)^4 = 3^4 = 81$

④ $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} K f(x) = K \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x)$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 16th. No.

Ex: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} 5f(x)$?

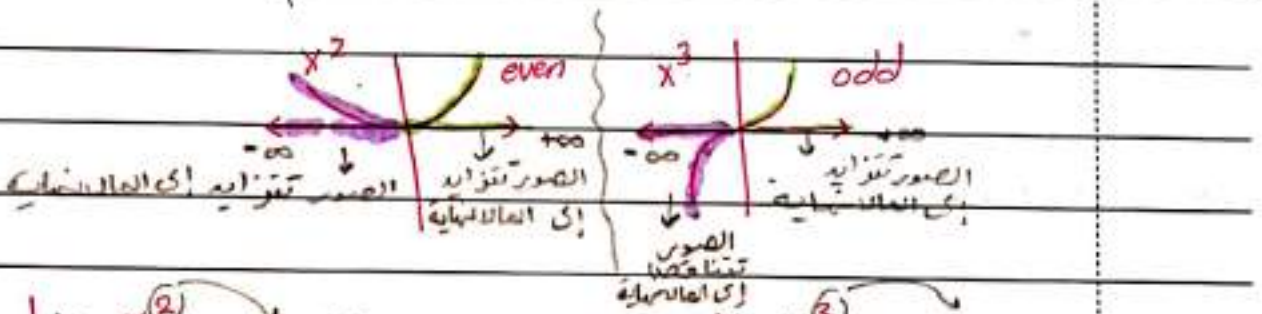
$= 5 \lim_{x \to -\infty} f(x) = 5 * 2 = 10$ ✱

---

* lim of x^n $\quad x \to +\infty$, $x \to -\infty$

① $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n = 1, 2, 3 \cdots$

② $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ even } 2, 4, 6 \cdots \\ -\infty, & n \text{ odd } 1, 3, 5 \cdots \end{cases}$



$\lim_{x \to \pm\infty} x^{②} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} x^{③} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^{③} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} x^{③} = -\infty$

Ex: * $\lim_{x \to \pm\infty} x^{⑦} = +\infty$ $\qquad$ * $\lim_{x \to -\infty} x^{⑦} = -\infty$

* $\lim_{x \to \pm\infty} x^{101} = +\infty$ $\qquad$ * $\lim_{x \to -\infty} x^{101} = +\infty$

Scanned with CamScanner

Subject Date 16th NOV No.

$\lim_{x \to +\infty, x \to -\infty} k x^n = k \lim_{x \to +\infty, x \to -\infty} x^n$ ← k يؤثر فقط بالإشارة (عاكس في الضرب)

$k \to +$ أو $-$

$-(+\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$

ex: $\lim_{x \to +\infty} -15x^2 = -(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} -8x^7 = -(-\infty) = +\infty$

x التي يؤثر فيها هذا الإشارة السالبة

يعني الضرب بالعدد السالب عاكس أثر

$\lim_{x \to -\infty} 9x^7 = +(-\infty) = -\infty$

* Limits of polynomials. $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

$\lim_{x \to +\infty, x \to -\infty} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n)$ بنصف فقط الحد الأكبر $c_n x^n$ كيف بنصرف

$\lim_{x \to +\infty, x \to -\infty} c_n x^n$

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} 7x^5 - 4x^2 + 10x^3 + 8x - 19 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 7x^5 = +\infty$

② $\lim_{x \to -\infty} 1 - x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + 10x^6 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} 10x^6 = +\infty$

③ $\lim_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 8)^4$

Sol ① $\lim_{x \to -\infty} (-3x^3)^4 = \lim_{x \to -\infty} 81x^{12} = +\infty$

Sol ② $\left(\lim_{x \to -\infty} -3x^3 + 2x^2 + 8\right)^4 = \left(\lim_{x \to -\infty} -3x^3\right)^4 = (-(-\infty))^4 = +\infty$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 16th Nov No.

* Limits of rational Functions: $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

* Quick method: إني أخذ أكبر قوة في البسط وفي المقام وأكبر قوة في المقام وحاصلها. ونحسب الـ limit

① $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+9}{6x-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{1-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3}{-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{3} = -\infty$

③ $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$

* حل ① بدون الـ Quick method

④ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+9}{6x-8} = \frac{-\infty}{-\infty}$ بالتعويض المباشر. كما لشكل $\frac{\nabla}{0}$ لذا نريها قيمة غير محددة.

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3+\frac{9}{x})}{x(6-\frac{8}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{9}{x}}{6-\frac{8}{x}}$ (zero عند التعويض) (zero عند التعويض)

نخصص تعويض مباشر. $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{6x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{6x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{6x}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

لم نخصص الـ lim لأنه فاخذ الجذر فنحل على الـ quick method

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 6th Nov No.

$$* \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \frac{+\infty}{-\infty} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$ Undetermined form

ناخذ أكبر قوة عامل مشترك من البسط والمقام

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}$$

$|x| = -x$ لأن $x \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}$$ بالتعويض المباشر $\to \frac{0}{3}$

$$= \frac{-1}{3}$$

$$* \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^6+5x^3} - x^3 = \infty - \infty \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$ Undetermined form

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^6+5x^3} - x^3}{1} * \frac{\sqrt{x^6+5x^3} + x^3}{\sqrt{x^6+5x^3} + x^3}$$ * نضرب بالمرافق

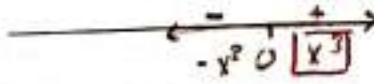
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^6+5x^3 \ominus x^6}{\sqrt{x^6+5x^3} + x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$ بالتعويض المباشر

$\Rightarrow \frac{0}{0}$ Undetermined form حالة

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{\sqrt{x^6\left(1+\frac{5}{x^3}\right)} + x^3}$$

ناخذ أكبر قوة عامل مشترك من البسط والمقام

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{|x^3|\sqrt{1+\frac{5}{x^3}} + x^3}$$



$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{x^3\sqrt{1+\frac{5}{x^3}} + x^3}$$

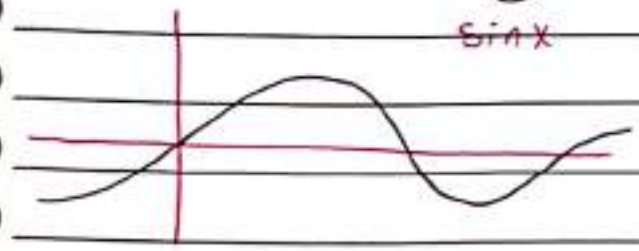
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{x^3\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^3}}+1\right)} = \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}$$ *

CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject

Date 16th, Nov No.

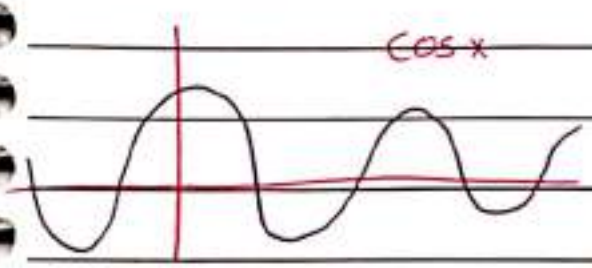
Limits at infinity :



* $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ = d.n.e

* $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ = d.n.e

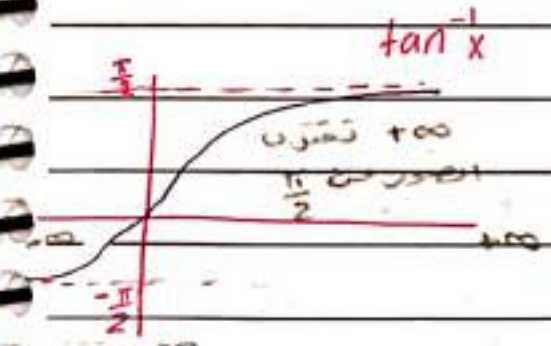
دائمة يتردد (يتذبذب) بين الـ 1 و -1



* $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ = d.n.e

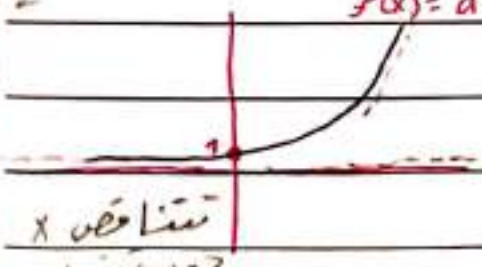
* $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ = d.n.e

* لنفس سبب sin x .



* $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

* $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$



$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

تتناقص x دون توقف ما بالـ ∞ الصور تقترب من الصفر

تزداد x دون توقف بالتالي ∞+ الصور تزداد دون توقف

CRAFT NOTEBOOK

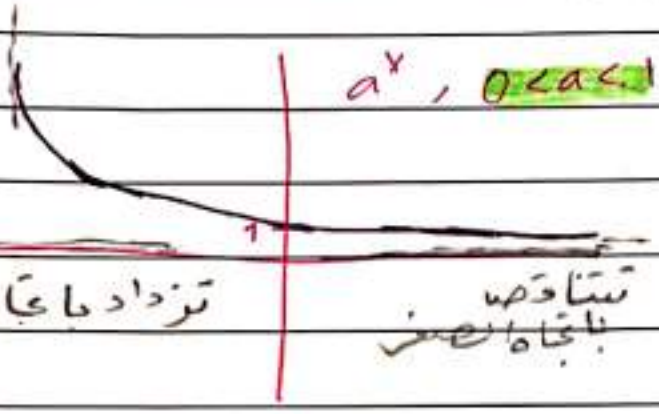
Scanned with CamScanner

Subject Date 16th .NOV No.

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ② $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

③ $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ ④ $\lim_{x \to -\infty} 5^x = 0$

a^x , $0<a<1$



$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

تتناقص باتجاه الصفر

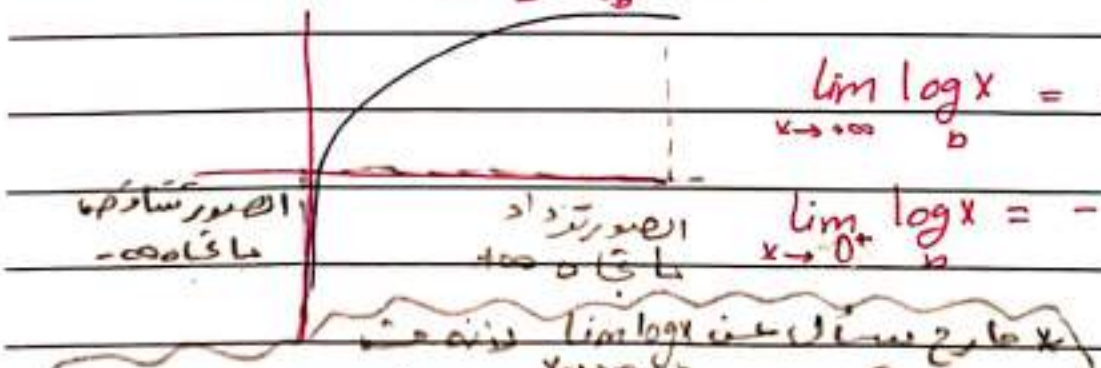
تزداد باتجاه $+\infty$

a^x بحالة اذا كان x يحتوي

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ $(0<\frac{1}{2}<1)$ ② $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$ $(0<\frac{1}{3}<1)$

③ $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ ④ $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\log_b^x$ و $\ln x$, $b>1$



$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$

الصور تتناقص باتجاه $-\infty$

الصور تزداد باتجاه $+\infty$

x عادي بيسأل عن $\lim_{x \to -\infty} \log_b x$ بنفس

من ضمن الـ Domain تبع اللوغاريتم

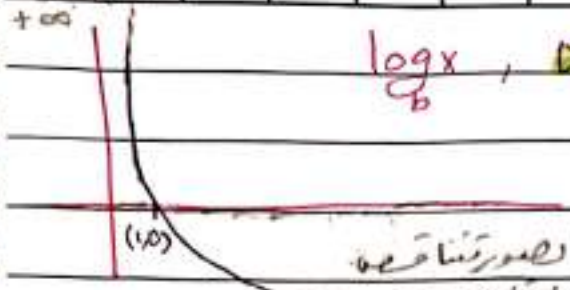
ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \log_5 x = +\infty$ ② $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ③ $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 16th NOV No.

الصور تزداد باتجاه +∞



$\log_b x$, $0 < b < 1$

الصور تتناقص باتجاه $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = +\infty$$

$\log_b x$, $b > 1$ عكس حالة

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \log_{0.5} x = -\infty$ ② $\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{4}} x = +\infty$

① $\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(\lim_{x \to +\infty} e^x) = \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

② $\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = \tan^{-1}(\lim_{x \to 0^+} \ln x) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

② $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$ ← $\lim_{x \to 0^+} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ | $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$= \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ | $= \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\therefore$ d.n.e

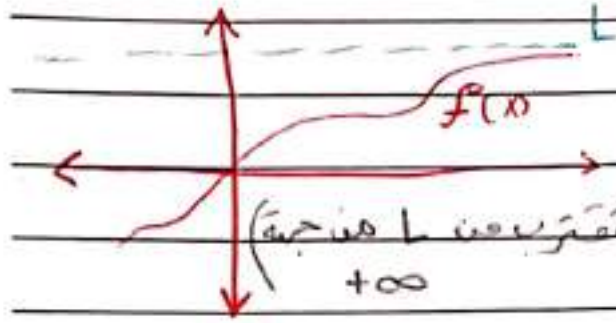
CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 18th. No.

* Horizontal Asymptotes:

* خطوط التقارب الأفقية .

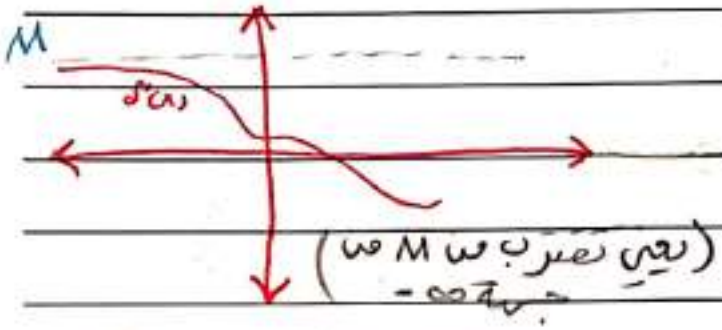


$y = L$ is H. asy

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

(يعني تقترب من L من جهة $+\infty$)

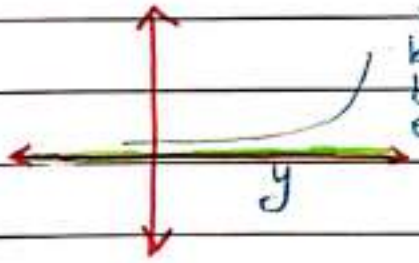
أو



$y = M$ is H. asy

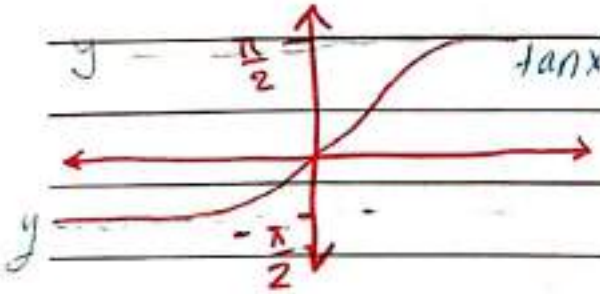
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$

(يعني تقترب من M من جهة $-\infty$)



$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$ $\quad y = 0$ is H. asy

← هو y-axis بهاي الحالة .



$\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore y = \frac{\pi}{2}$ / $y = -\frac{\pi}{2}$ H. asy

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 17th Nov

$f(x) = x^2 + x - 1$ No H. asy.

b^x مثل [1] Horizontal asymptote : function

$\tan x$ مثل [2] أو Horizontal asymptotes

poly مثل [0] أو Horizontal asymptote حيثما اكبر

Ex: Find the H.asy ? نحسب الـ lim

① $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$y = 1$ H. asy

② $f(x) = \frac{2x - 1}{|x| - 3}$

$|x|$: $-$ | $+$; $-x$, x

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{|x| - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{|x| - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{-x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$

$y = 2$, $y = -2$ are H. asy ✗

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 18th NOV No.

* The Squeeze Thm & نظرية الشطيرة

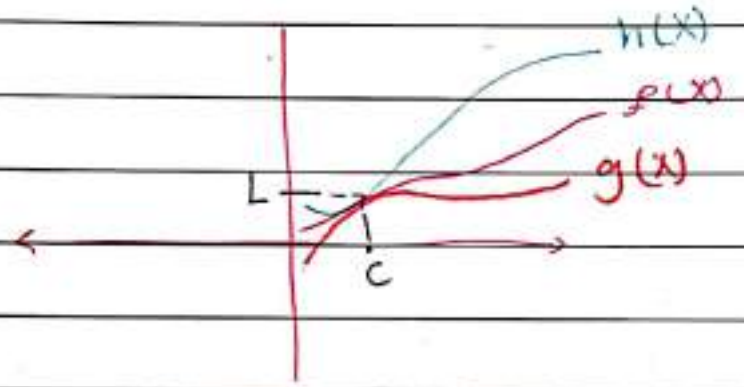
نظرية مهمة في إيجاد النهايات

Let f, g, h be functions, S

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

if $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L$

Then $\lim_{x \to c} f(x) = L$



ex: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ ... d.n.e

بالحل التحادي

(مقبول غير)

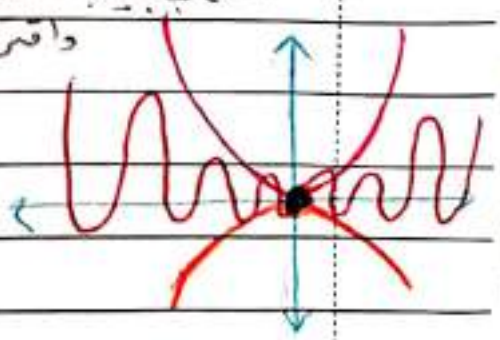
$$|g(x)| < x^2 \sin\frac{1}{x} \le |h(x)|$$

بجيب اقتران أكبر واقتران أصغر

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \times x^2$$

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$



$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \text{by squeeze Thm}$$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 18th. Nov No.

Ex: $1 - x^2 \leq f(x) \leq \cos x$

$\lim_{x \to 0} f(x)$? $\lim_{x \to 0} 1 - x^2 \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq \lim_{x \to 0} \cos x$

$1 \leq \lim_{x \to 0} f(x) \leq 1$

by S.T $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ✱

Scanned with CamScanner

Subject

Date 18th Nov.

Subj.

* Limits of trigonometric functions:

① $\lim_{x \to \pi} \sin x$ = * تعويض مباشر ← Sin متصل عند π

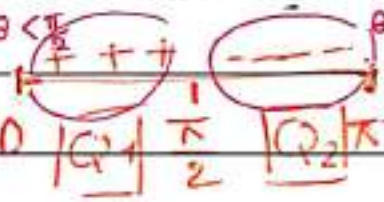
$= \sin \pi = 0$ Domain و π موجودة في الـ

② $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ * بالتعويض مباشر

③ $\lim_{x \to \pi} \tan x = \tan \pi = 0$ * تعويض مباشر

④ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ = * بالتعويض مباشر غير معرف لأن $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي لـ Domain الـ tan

اكد $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0} \to$ وحسب إشارة الـ

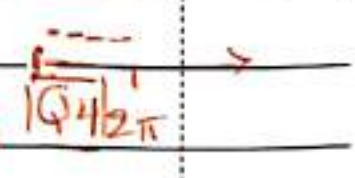


$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

} d.n.e

⑤ $\lim_{x \to 2\pi^-} \csc x = \lim_{x \to 2\pi} \frac{x}{\sin x} = \frac{2\pi}{\sin 2\pi} = \frac{2\pi}{0}$



$\therefore \to -\infty$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 18th. No. No.

Thm $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ بالتعويض المباشر $\frac{0}{0}$ undetermined form

* يمكن إثباتها بطريقة لوبيتال

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

Scanned with CamScanner

Subject Date 18th Nov No.

Sub.

ex ① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \frac{7}{5}$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 8x} = \frac{1}{8}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 10x} = \frac{8}{10}$

④ $\lim_{x\to 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + x}$ تعويض مباشر $\frac{3(0)+0}{0+0} = \frac{0}{0}$ ∇ 0

نخارج $\lim_{x\to 0} \frac{x(3+\frac{\tan x}{x})}{x(\frac{\sin x}{x}+1)}$ عامل مشترك مع البسط والمقام

$= \frac{3+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ تعويض مباشر $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ ∇ 0

نخارج $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ ضرب مرافق للبسط

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x(1+\cos x)}$ متطابقة

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \frac{\sin x}{1+\cos x}$ توزيع النهاية

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}$ تعويض مباشر

$= 1 * \frac{0}{1+1} = 0$

CRAFT NOTEBOOK
Scanned with CamScanner

Subject

Date 18th Nov No.

Ex :

$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin x & , x<0 \\ \cos x & , 0\le x\le \pi \\ \sin x & , x>\pi \end{cases}$$

Find: ① $\lim_{x\to 0} f(x)$ ② $\lim_{x\to} f(x)$??

① $\lim_{x\to 0} f(x) =$ → $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ تعويض مباشر
→ $\lim_{x\to 0^-} 1+\sin x = 1+0 = 1$ تعويض مباشر
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

② $\lim_{x\to \pi} f(x) =$ → $\lim_{x\to \pi^+} \sin x = \sin\pi = 0$ تعويض مباشر
→ $\lim_{x\to \pi^-} \cos x = \cos\pi = -1$ تعويض مباشر
$\Rightarrow \lim_{x\to \pi} f(x)$ d.n.e

Ex : Suppose that $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

Find $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 8x}{x f(4x)}$??

① نفرض مقام الدالة = y
② نعبر الاقتراب من x اي y
③ نعبر كل x في المطلوب اي y

$4x = y \Rightarrow x = \frac{y}{4}$

$x \to 0$

$y \to 0$

$\lim_{y\to 0} \frac{\tan^2 8(\frac{y}{4})}{\frac{y}{4} f(y)} \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{4 \tan 2y}{y f(y)} \to 4 \lim_{y\to 0} \frac{\tan 2y}{y f(y)}$

$\Rightarrow 4 \lim_{y\to 0} \frac{\tan 2y}{1y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1}{f(y)}$ من المعطى

$= 4 * 2 * \frac{1}{4} = 2$ ✳

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21 Nov No.

التفاضل

The Derivative of function: الاشتقاق

$f(x) \rightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}\Big|_{x=a}$ (prime) تعريف المشتقة عند نقطة:

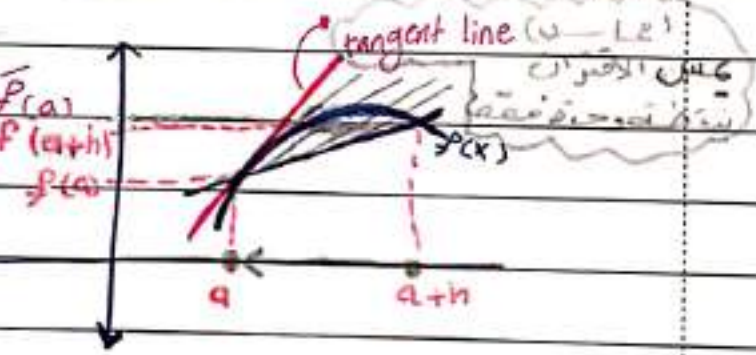
$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ exist (المشتقة الأولى).

* قابل للاشتقاق عند a

* المقصود بالمشتقة الأولى هندسياً:

ميل المماس:

Slope of tangent = $f'(a)$



خذ ميل المماس

عن طريق إيجاد القاطع

$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightsquigarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

في الاقتراب من القاطع سيمثل المشتقة الأولى عندما $h \to 0$

* كتابة التعريف بطريقة أخرى:

$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th NOV No.

Ex: Find the derivative of the function

$f(x) = x^2$??

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

بتعويض مباشر

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{0}{0}$$

إجراء

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

$\therefore f'(x) = 2x$

Ex:

↳ $f'(5) = 2*5 = 10$ ✻

* Differentiation Rules *

[1] $\frac{d}{d(x)}(c) = 0$, $c \in R$ مشتقة الثابت = صفر

↳ Ex: $f(x) = 10 \longrightarrow f'(x) = 0$

[2] $\frac{d}{d(x)}(x^n) = nx^{n-1}$

↳ Ex: $f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

↳ Ex: $y = x^{-7} \longrightarrow y' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$

[3] $\frac{d}{d(x)}(cf) = cf'$

↳ Ex: $y = 7x^2 \longrightarrow y' = 7*(2)x^{2-1} = 14x$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21th Nov No.

④ $\frac{d}{dx}(f \pm g) = f' + g'$

Ex: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x} + 7$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + 12x^{-1} + 7$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} + \frac{2}{3}x^{(\frac{2}{3}-1)} + -12x^{(-1-1)} + 0$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 12x^{-2}$

⑤ $\frac{d}{dx}(fg) = fg' + gf'$ الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

Ex: $y = \underset{①}{(8x+3)} * \underset{②}{(x^2-3x)}$

$\frac{dy}{dx} = ① * ②' + ② * ①'$

$(8x+3)*(2x-3) + (x^2-3x)*8$

⑥ $\frac{d}{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ ⇒ المقام * مشتقة البسط − البسط * مشتقة المقام / (المقام)²

Ex①: $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5x} \rightarrow f'(x) = \frac{(x^3+5x)*(2x) - (x^2)*(3x^2+5)}{(x^3+5x)^2}$

Ex②: $f(x) = \frac{x^4-1}{8x^3+2x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(8x^3+2x^2)*(4x^3) - (x^4-1)*(24x^2+4x)}{(8x^3+2x^2)^2}$

⑦ $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{f}\right) = \frac{-c*f'}{(f)^2}$ حالة خاصة من القاعدة ⑥

Ex: $f(x) = \frac{7}{x^3+10x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7*(3x^2+10)}{(x^3+10x)^2}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th NOV No.

Ex : ← أمثلة على إيجاد المشتقة عند نقطة

① $f(x) = \frac{7x-1}{x^2+5}$, Find $f'(2)$

⇒ $f'(x) = \frac{(x^2+5)*(7) \ominus (7x-1)*(2x)}{(x^2+5)^2}$

$f'(2) = \frac{(2^2+5)*7 \ominus (7*2-1)*(2*2)}{(2^2+5)^2} = \frac{11}{81}$

① ②

② $f(x) = (10x-1)(8x^2+5)$, Find $f'(1)$

⇒ $f'(x) = (10x-1)*(16x) \oplus (8x^2+5)*(10)$

$f'(1) = (10-1)*16 \oplus (8+5)*10$

$= 274$

خطوات المشتقة بطريقة (1) باستخدام قواعد الاشتقاق ② نخوض الرقم المراد إيجاد المشتقة عنده.

Chain Rule 8 قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Ex: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \frac{4}{x^2+1}$

Find $(fog)'(1)$?

$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$

$= (fog)' = f'(g(1)) * g'(1)$

$= f'(2) * g'(1)$

$= f'(2) * -2$

$= 5 * -2$

$= -10$

$g(1)$??

$= \frac{4}{x^2+1} = \frac{4}{1^2+1} = \frac{4}{2} = 2$

$g'(x) = \frac{-4(2x)}{(x^2+1)^2}$

$g'(1) = \frac{-4*2}{(1+1)^2} = -2$

$f'(x) = 2x + 1$

$f'(2) = 2*2 + 1$

$= 5$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th NOV No.

* من تطبيقات قاعدة السلسلة :

$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x)$ تنتج من قاعدة السلسلة

$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) * g'(x)$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

نضعها $\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} g'(x)$

حيث $g(x)$ هي x بدل

Ex: ⟹ Find y' ?

① $y = (x^2+5)^{10} \longrightarrow 10(x^2+5)^9 * 2(x)$

أي مقدار ينفع أخلك القوس لوحده فبستخدم قاعدة السلسلة

② $y = (x^7-2)^{-5} \longrightarrow -5(x^7-2)^{-6} * 7x^6$

③ $y = \sqrt[3]{x^2+1} \longrightarrow (x^2+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} * (2x)$

④ $y = \sqrt{x^3+x^2}$

Sol①: $(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}} * 3x^2+2x$

$= \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

Sol②: * قاعدة الجذر التربيعي :

$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ مشتقة جذر واحد على ٢ × الجذر نفسه

الحل ⟹ $\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th NOV No.

* فرع آخر من السؤال (4) ⟸

* $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ بجزء أشتق الاثنين

بجوه من

$$= \frac{3(1)^2 + 2(1)}{2\sqrt{1+1}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

If $f(2x+5) = x^3 + 2x^2 + 4$ find $f'(3)$?

$g(x)$ ← هنا بشتق على قاعدة السلسلة

⊖ نشتق الطرفين ، باعتبار إنها $f(g(x))$

$$f'(2x+5) * 2 = 3x^2 + 4x$$

$$= 2f'(3) = 3(-1)^2 + 4(-1) = -1 \;/2$$

$$f'(3) = \frac{-1}{2}$$

نساوي حاد اللي القوسه بـ 3 لأنه لازم تكون المشتقة بالنسبة لـ 3

$2x+5 = 3$

$2x = -2$

$x = -1$

نعوض كل x بـ -1

$\frac{d}{d(x)}\left(f(x^3)\right) = 12x^{17}$ find $f'(x)$? ⟹ بسيطة هاد السؤال إنه

الحل: ⊙ الاشتقاق على قاعدة السلسلة

طرف المشتقة لـ $f(x^3)$

$f'(x^3) * 3x^2 = 12x^{17}$ ÷ $3x^2$: فقط بشتق الطرف اليمين لأنه الطرف اليسار جاهز أصلاً

$f'(x^3) = \frac{12x^{17}}{3x^2}$ وهيك خلص من السؤال

$f'(x^5) = 4x^{15}$

$f'(y) = 4(y^{\frac{1}{3}})^{15}$ ← نستبدل الـ (x^5) لأنه بالسؤال عندي (x)

$f'(y) = 4y^5$ ** $x^3 = y \rightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ وكان كل x بصير $y^{\frac{1}{3}}$

(يمكن كتابتها x بدلالة x)

$f'(x) = 4x^5$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 21th. Nov No.

Derivatives of Trigonometric functions:

* إلي بيابتشواداتها بـ cos تكون مشتقتهم بالسالب cos / cot / csc

$$* \frac{d}{dx}(\sin(f(x))) = \cos f(x) * f'(x)$$

Ex: $y = \sin(x^3) \longrightarrow y' = \cos(x^3)(3x^2)$

$$* \frac{d}{dx}(\cos(f(x))) = \ominus \sin f(x) * f'(x)$$

Ex: $y = \cos(5x^2+10) \longrightarrow y' = -\sin(5x^2+10)(10x)$

$$* \frac{d}{dx}(\tan(f(x))) = \sec^2(f(x)) * f'(x)$$

Ex: $y = \sqrt{\tan x} \longrightarrow y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

$$* \frac{d}{dx}(\cot(f(x))) = \ominus \csc^2(f(x)) * f'(x)$$

Ex: $y = \cot^5(x^2) \xrightarrow{\text{تعديل}} y = (\cot x^2)^5$ — اخلي على قاعدة السلسلة

$y' = 3(\cot x^2)^2 * (-\csc^2 x^2) * 2x$

$$* \frac{d}{dx}(\sec(f(x))) = \sec(f(x)) \tan(f(x)) f'(x)$$

Ex: $y = \sec\left(\frac{2}{x+1}\right) \longrightarrow y' = \sec\left(\frac{2}{x+1}\right) \tan\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{-2(1)}{(x+1)^2}\right)$

$$* \frac{d}{dx}(\csc(f(x))) = -\csc(f(x)) \cot(f(x)) f'(x)$$

Ex: $y = \csc(x^3) \longrightarrow y' = -\csc(x^3)\cot(x^3)(3x^2)$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 21th NOV No.

* Ex : $y = \sin x + \cos x$, find $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 0 - 1 = -1$ *

حظ هون مادة امتحان الهندسة

"اللَّهُمَّ افْتَحْ لِي أَبْوَابَ حِكْمَتِكَ، وَانْشُرْ عَلَيَّ رَحْمَتَكَ، وَامْنُنْ عَلَيَّ بِالفَهْمِ وَالحِفْظِ، سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا، إِنَّكَ أَنْتَ العَلِيمُ الحَكِيمُ"

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 23th Nov No.

* Derivative of exponential functions:

$$\frac{d}{dx}(b^{f(x)}) = b^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln b$$

Ex ① $y = 5^{x^2} \longrightarrow y' = (5^{x^2})(2x)(\ln 5)$

② $y = 2^{\cos x} \longrightarrow y' = (2^{\cos x})(-\sin x)(\ln 2)$

③ $y = 3^x \longrightarrow y' = 3^x \ln 3$

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x)$$

المقدار الموجود في الأعلى هو نفسه بعد التفاضل

فوق أكل الاستعاق ln e يكتب يساوي واحد فما بحطه .

Ex ① $y = e^{(x+\tan x)} \longrightarrow y' = (e^{x+\tan x})(x\sec^2 x + \tan x)$ ضرب اقترانين

② $y = e^{\sqrt{1-5x^3}} \longrightarrow y' = (e^{\sqrt{1-5x^3}})\left(\frac{-15x^2}{2\sqrt{1-5x^3}}\right)$

③ $y = e^x \longrightarrow y' = e^x$ ← بتضل نفسي ماهي .

④ $y = e^{-x} + \pi^{-x} \longrightarrow y' = (e^{-x})(-1) + (\pi^{-x})(-1)(\ln \pi)$

$= -e^{-x} - (\ln \pi)(\pi^{-x})$

هاي عند القاعدة الأولى $(b^{f(x)})$

Scanned with CamScanner

Subject

Date 23th. Nov No.

Ex: if $f(x) = e^x g(x)$, $g(0) = 2$, $g'(0) = 5$

Find $f'(0)$??

$f(x) = e^x g(x)$ ⟶ $f'(x) = e^x * g'(x) + g(x) e^x$

حاصل ضرب اشتقاقين

$f'(0) = e^0 * g'(0) + g(0) e^0$

$1 * 5 + 2 * 1 = 7$

---

* Derivatives of logarithmic functions:

$$\frac{d}{d(x)}\left(\log_b f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}, \quad f(x) > 0$$

Find y'?

① $y = \log_2(x^3+5) \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{(x^3+5)\ln 2}$

② $y = \log(\sin x) \longrightarrow y' \frac{\cos x}{(\sin x)\ln 10} = \frac{\cot x}{\ln 10}$

لأنه الأساس — مشروط وجود ما بدنا نكتبه فبكون 10

$$\frac{d}{d(x)}\left(\ln(f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) > 0$$

هو نفسه log لكن الأساس إله e

(هيك المفروض من بالنسبة لقاعدة log إنه بنضرب f(x) بالأساس ln بس أساسه e فبتساوي (1) ما بكتبها)

Find y'?

① $y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$

② $y = \ln(x^2+1) \longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+1}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 23th Nov No.

③ $y = \ln(\cos e^x) \longrightarrow y' = \frac{(-\sin e^x)\, e^x}{\cos e^x} = (-\tan e^x)\, e^x$

④ $y = \ln(\ln x)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e} \frac{\frac{1}{e}}{\ln e} = \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

⑤ $y = \ln|\sin x + x|$, $\left(\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}\right)$ → يعني بتجاهل Absolute value = جوا ال

$\Rightarrow y' = \frac{\cos x + 1}{\sin x + x}$

Ex:

① $y = \log_7 x$

7 ← الأساس

عدد (يعني بعتبر على القاعدة الأصلية بحيث ال ln وما)

اكل $\Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln 7}$

② $y = \log_x 7$

x ← الأساس متغير (function)

(بجاهد حالك)

اكل ← منخصائص اللوغاريتمات:

$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$

$\Rightarrow y = \frac{\ln 7}{\ln x}$ ← ماعبارة عن ثابت على متغير وبنسبة واشتقاق اعتبرها

$y' = \frac{-\ln 7 * (\frac{1}{x})}{(\ln x)^2} = \frac{-\ln 7}{x(\ln x)^2}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 23th Nov No.

Ex: find y' ?

① $y = \ln\left(\frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x}}\right)$ حاي بالاشتقاق اذا باشر رح يكون حلها طويل وصعب

نوا لرجعها بخصائص ln

⊖ خصائص ln:

$\rightarrow y = \ln x^2 \sin x - \ln\sqrt{1+x}$ * القسمة تحولها طرح

$y = \ln x^2 + \ln \sin x - \ln (1+x)^{\frac{1}{2}}$ * الضرب تحولها جمع

$y = 2\ln x + \ln \sin x - \frac{1}{2}\ln(1+x)$ * الأس بنزل جنبال ln

$y' = 2\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

② $y = \log_4\left(\frac{\cos x}{(x-1)^3 (x^2+1)^4}\right)$ نفس خصائص الـln فوق

نفك بخصائص

$y = \log_4 \cos x - \log_4 (x-1)^3 (x^2+1)^4$

$y = \log_4 \cos x - \log_4 (x-1)^3 + \log_4 (x^2+1)^4$

$y = \log_4 \cos x - 3\log_4 (x-1) + 4\log_4 (x^2+1)$

$y' = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 4} - 3\frac{1}{(x-1)\ln 4} + 4\frac{2x}{(x^2+1)\ln 4}$

$= \ln 4\left(-\tan - \frac{3}{x-1} + \frac{8x}{x^2+1}\right)$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject

Date 23th, NOV No.

* Derivatives of inverse trigonometric functions :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(f(x))) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}(f(x))) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

*** find y' ?**

① $y = \sin^{-1}x \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② $y = \sin^{-1}(\ln x) \longrightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

*** find y' ?**

③ $y = \cos^{-1}(x^2) \longrightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x)^4}}$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}\cot^{-1}(f(x)) = \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

Ex: ① $y = \tan^{-1}x \longrightarrow y' = \frac{1}{1+(x)^2}$

② $y = \tan^{-1}e^x$

↳ $y' = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Ex: ① $y = \cot^{-1}(x^3+1) \longrightarrow y' = \frac{-2x}{1+(x^3+1)^2}$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject Date 23 Hh .NO UNo.

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}f(x)) = \frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2-1}} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}f(x)) = \frac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f(x)^2-1}}$$

Ex: ① $y = \sec^{-1}x \longrightarrow y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

② $y = \sec^{-1}(x^3) \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{|x^3|\sqrt{(x^3)^2-1}} = \frac{3x^2}{|x^3|\sqrt{x^6-1}}$

Ex: ① $y = \csc^{-1}(\ln x) \longrightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{|\ln x|\sqrt{(\ln x)^2-1}}$

* ملاحظة:

⊛ بمشتقة الاقترانات المثلثية العكسية يكون البسط داعماً مشتقة داخل الـ inverse.

⊛ الفرق بين مشتقة $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\cos^{-1}$

⊛ الفرق بين مشتقة $\tan^{-1}$ و $\cot^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\cot^{-1}$

⊛ الفرق بين مشتقة $\sec^{-1}$ و $\csc^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\csc^{-1}$

* اكيد موجود في مشتقة $\sin^{-1}$ و $\sec^{-1}$ لكنه عكس بعض أما $\tan^{-1}$ لا يوجد في مشتقته حيز.

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner